

Analysis für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 51 (4 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ im Fall

(a) $a_k := \frac{(-1)^k}{k+1}$,

(b) $a_k := (k^3 + 1)3^{k+1}$,

(c) $a_k := k^k$,

(d) $a_k := \frac{k^k}{k!}$.

Aufgabe 52 (4 Punkte)

Sei $m \in \mathbb{N}_0$.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k}{k} x^k$.

(b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion: $\frac{1}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k}{k} x^k \quad (|x| < 1)$.

(Hinweis: Cauchy-Produkt, Aufg. 26b)

Aufgabe 53 (4 Punkte)

Berechnen Sie folgende Grenzwerte für $a = 0$ und $a = \infty$:

(a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{x}e^x - xe^{-x}}{\frac{1}{x}e^x + xe^{-x}}$,

(b) $\lim_{x \rightarrow a} x^{\frac{1}{x}}$,

(c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

Aufgabe 54 (4 Punkte)

Sei $a > 0$. Zeigen Sie die Stetigkeit der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \ln a, & x = 0 \\ \frac{a^x - 1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

Bitte wenden!

Aufgabe 55*

- (a) Zeigen Sie, dass aus der Beziehung

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \quad (0 < |x| < r)$$

(mit $r > 0$) folgt, dass die Koeffizienten B_k mit den Bernoulli-Zahlen übereinstimmen.

- (b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $1 + e^x + \dots + e^{nx} \quad (x \in \mathbb{R})$ die erzeugende Funktion der Folge $\left(\frac{0^k + 1^k + 2^k + \dots + n^k}{k!} \right)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ist, d.h. es gilt

$$1 + e^x + \dots + e^{nx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k + 1^k + 2^k + \dots + n^k}{k!} \cdot x^k \quad (x \in \mathbb{R})$$

- (c) Zeigen Sie:

$$\frac{e^{(n+1)x} - 1}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1} = 1 + e^x + \dots + e^{nx} \quad (x \neq 0)$$

- (d) Bilden Sie das Cauchyprodukt beider Potenzreihen auf der linken Seite von (c) und leiten Sie durch Koeffizientenvergleich die in der Vorlesung angegebene Formel

$$0^k + 1^k + 2^k + \dots + n^k = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k B_i \binom{k+1}{i} (n+1)^{k+1-i} \quad (k \in \mathbb{N}_0)$$

her.

Abgabe einzeln oder zu zweit: Montag, 28.1.2008 bis 16¹⁵ Uhr,
Übungskasten vor der Bibliothek im 1. Stock

*Diese Zusatzaufgabe soll weitere Anwendungsmöglichkeiten des Vorlesungsstoffes aufzeigen. Sie wird aber nicht korrigiert und ist auch nicht prüfungsrelevant.