

Lösungsvorschläge zu Analysis I für Informatiker

Blatt 7

Wir werden im Folgenden wichtige Grenzwertsätze der Vorlesung benutzen, insbesondere:

$$(1) \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \implies \begin{cases} a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b \\ \lambda \cdot a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda \cdot a \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ a_n \cdot b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \cdot b \\ \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a}{b} \quad (\text{wenn } b \neq 0) \end{cases}$$

$$(2) \quad q \in \mathbb{R} \wedge |q| < 1 \implies q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{VL 2.7)c})$$

$$(3) \quad q \in \mathbb{R} \wedge |q| < 1 \wedge k \in \mathbb{N}_0 \implies n^k \cdot q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{VL 2.7)e})$$

$$(4) \quad c_n, c \geq 0 \wedge c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c \wedge \mathbb{N} \ni k \geq 2 \implies \sqrt[k]{c_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{c} \quad (\text{VL 2.6)a})$$

31. (4 Punkte)

a) **Behauptung:** $a_n = \frac{4n^2 - n^4}{3(n^2 + 1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{3}$

Beweis:

$$a_n = \frac{4n^2 - n^4}{3(n^2 + 1)^2} = \frac{n^4 \cdot \left(\frac{4}{n^2} - 1\right)}{n^4 \cdot 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{4}{n^2} - 1}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^2}$$

$$\text{Zähler: } \frac{4}{n^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{VL}} 0 \xRightarrow{(1)} \frac{4}{n^2} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1$$

$$\text{Nenner: } \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{VL}} 0 \xRightarrow{(1)} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1^2 = 1 \neq 0$$

$$\xRightarrow{(1)} \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{4}{n^2} - 1}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{(-1)}{1} = -\frac{1}{3}$$

b) **Behauptung:** $a_n = \frac{2^n + n^2}{\sqrt{3^n + 4^n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

Beweis:

$$a_n = \frac{2^n + n^2}{\sqrt{3^n + 4^n}} = \frac{2^n + n^2}{\sqrt{3^n + 2^{2n}}} = \frac{2^n + n^2}{\sqrt{3^n + (2^n)^2}} = \frac{2^n \cdot \left(1 + \frac{n^2}{2^n}\right)}{2^n \cdot \sqrt{1 + \frac{3^n}{4^n}}} = \frac{1 + n^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}}$$

$$\text{Zähler: } n^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(3)} 0 \xRightarrow{(1)} 1 + n^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\begin{aligned}
\text{Nenner: } & \left(\frac{3}{4}\right)^n \xrightarrow[(2)]{n \rightarrow \infty} 0 \xRightarrow[(1)]{} 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \\
& \xRightarrow[(4)]{} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{1} = 1 \neq 0 \\
& \xRightarrow[(1)]{} \frac{1 + \frac{n^2}{2^n}}{\sqrt{1 + \frac{3^n}{4^n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1
\end{aligned}$$

c) **Behauptung:** $a_n = \sqrt[n]{3^n \cdot n^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3$

Beweis:

$$\begin{aligned}
a_n &= \sqrt[n]{3^n \cdot n^3} = \sqrt[n]{3^n} \cdot \sqrt[n]{n^3} = 3 \cdot (\sqrt[n]{n})^3 \\
\text{Nach Vorlesung 2.7d) gilt : } & \sqrt[n]{n} \xrightarrow[(1)]{n \rightarrow \infty} 1 \xRightarrow{} (\sqrt[n]{n})^3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1^3 = 1 \xRightarrow{} \\
& \xRightarrow{} 3 \cdot (\sqrt[n]{n})^3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3
\end{aligned}$$

d) **Behauptung:** $a_n = \sqrt[2n]{2^n + n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{2}$

Beweis:

Hier ist zu beachten, daß die Grenzprozesse bei der Bildung der $2n$ -ten Wurzel und derjenige unter dem Wurzelzeichen nicht entkoppelt werden dürfen: beide n müssen zugleich gegen ∞ gehen. Wir wenden deshalb das Sandwich-Lemma der Vorlesung ((2.5)f)) an, das besagt:

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \wedge b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \wedge a_n \leq c_n \leq b_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \implies c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

Nun gilt wegen der Bernoulli-Ungleichung:

$$2^n = (1 + 1)^n \geq 1 + n \cdot 1 \geq n \implies n2^n \geq n^2$$

also:

$$\begin{aligned}
2^n &\leq 2^n + n^2 \leq n2^n + n2^n = 2n \cdot 2^n \implies \\
&\xRightarrow{\text{VL 1.20)e)}} \sqrt[2n]{2^n} \leq \sqrt[2n]{2^n + n^2} \leq \sqrt[2n]{2n \cdot 2^n} = \sqrt[2n]{2n} \cdot \sqrt[2n]{2^n}
\end{aligned}$$

$$\text{Ferner: } \sqrt[2n]{2^n} = \sqrt[2n]{((\sqrt{2})^2)^n} = \sqrt[2n]{(\sqrt{2})^{2n}} = \sqrt{2}.$$

Nun besagt Folgerung 2.17) der Vorlesung:

Konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a , so konvergiert auch jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a .

Da aber $(\sqrt[2n]{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(\sqrt[n]{n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist, und zudem nach VL (2.7)d) gilt, daß $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, folgt somit $\sqrt[2n]{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

Also:

$$\begin{array}{ccccccc} \sqrt{2} = & \sqrt[2n]{2^n} & \leq & \sqrt[2n]{2^n + n^2} & \leq & \sqrt{2} \cdot \sqrt[2n]{2^n} & \\ & \downarrow & & & & \downarrow & \\ & \sqrt{2} & & & & \sqrt{2} & \end{array}$$

und das Sandwich-Lemma besagt, daß auch für die eingeschlossene Folge $\sqrt[2n]{2^n + n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{2}$ gilt.

32. (4 Punkte)

Es seien im Folgenden $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$.

a) **Behauptung:** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \text{sign}(a - b)$

Beweis:

1. Fall: $a = b \implies a^n = b^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0 \implies \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = 0 = \text{sign}(a - b)$

2. Fall: $0 < b < a \implies 0 < \frac{b}{a} < 1$.

$$\text{Dann: } \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \frac{\cancel{a^n} \cdot \left(1 - \frac{b^n}{a^n}\right)}{\cancel{a^n} \cdot \left(1 + \frac{b^n}{a^n}\right)} = \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

Nun gilt: $0 < \frac{b}{a} < 1 \xrightarrow{(2)} \left(\frac{b}{a}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \xrightarrow{(1)} 1 \pm \left(\frac{b}{a}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \pm 0 = 1 \neq 0 \xrightarrow{(1)}$

$$\xrightarrow{(1)} \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1 = \text{sign}(a - b)$$

3. Fall: $0 < a < b \implies 0 < \frac{a}{b} < 1$

$$\text{Dann: } \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \frac{\cancel{b^n} \cdot \left(\frac{a^n}{b^n} - 1\right)}{\cancel{b^n} \cdot \left(\frac{a^n}{b^n} + 1\right)} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1}.$$

Nun gilt: $0 < \frac{a}{b} < 1 \xrightarrow{(2)} \left(\frac{a}{b}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, also:

Zähler: $\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 - 1 = -1$

Nenner: $\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 + 1 = 1$

$$\implies \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{1} = -1 = \text{sign}(a - b) \quad \text{q.e.d.}$$

b) **Behauptung:** $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a, b)$

Beweis:

Es ist wieder die Koppelung der Grenzübergänge $\frac{1}{n}$ im Exponenten und $a^n + b^n$ im Radikanden zu beachten.

1. Fall: $0 < b \leq a \implies 0 < b^n \leq a^n \implies a^n \leq a^n + b^n \leq a^n + a^n = 2a^n \xRightarrow{(1.20)e}$

$$\begin{array}{ccccccc} a & = & \sqrt[n]{a^n} & \leq & \sqrt[n]{a^n + b^n} & \leq & \sqrt[n]{2a^n} = \sqrt[n]{2} \cdot a \\ & & \downarrow & & & & \downarrow^{(2)} \\ & & a & & & & 1 \cdot a = a \end{array}$$

$\xRightarrow{\text{Sandwich}} \sqrt[n]{a^n + b^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a = \max(a, b)$

2. Fall: $0 < a < b \implies 0 < a^n < b^n \implies b^n < a^n + b^n < b^n + b^n = 2b^n \xRightarrow{(1.20)e}$

$$\begin{array}{ccccccc} b & = & \sqrt[n]{b^n} & \leq & \sqrt[n]{a^n + b^n} & \leq & \sqrt[n]{2b^n} = \sqrt[n]{2} \cdot b \\ & & \downarrow & & & & \downarrow^{(2)} \\ & & b & & & & 1 \cdot b = b \end{array}$$

$\xRightarrow{\text{Sandwich}} \sqrt[n]{a^n + b^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b = \max(a, b) \quad \text{q.e.d.}$

33. (4 Punkte)

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch:

$$a_0 = 0 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Als wichtige Aussage benutzen wir in dieser und den folgenden Aufgaben den Konvergenzsatz für monotone Folgen:

(♣) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ist die Folge } (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ monoton wachsend (bzw. fallend) und nach oben} \\ \text{(bzw. unten) beschränkt, so ist sie konvergent.} \end{array} \right.$

a) **Behauptung:** Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist konvergent.

Beweis:

Es ist $a_0 = 0$, $a_1 = \sqrt{1+0} = 1$, $a_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ usw.

Vermutung: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq a_n < a_{n+1} < 2$

Beweis der Vermutung durch Induktion:

Induktionsanfang $n = 0 : 0 = a_0 < 1 = a_1 < 2$

Induktionsschritt $n \mapsto n+1 :$

Induktionsvoraussetzung: Es sei für ein $n \in \mathbb{N}_0$ die Aussage $0 \leq a_n < a_{n+1} < 2$ wahr.

zu zeigen: $0 \leq a_{n+1} < a_{n+2} < 2$

Nun ist nach IV $0 \leq a_n < a_{n+1} \implies 0 \leq a_{n+1}$ und es gilt:

$$\begin{array}{lcl} a_{n+2} & = & \sqrt{1 + a_{n+1}} \underset{\text{IV}}{<} \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3} < 2 \\ a_{n+2} & = & \sqrt{1 + a_{n+1}} \underset{\text{IV}}{>} \sqrt{1 + a_n} \underset{\text{Def.}}{=} a_{n+1} \end{array}$$

Also $0 \leq a_{n+1} < a_{n+2} < 2$ wie gewünscht.

Damit ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ streng monoton wachsend und durch 0 nach unten, durch 2 nach oben beschränkt, wegen (\clubsuit) also konvergent: $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G \in \mathbb{R}$.

Es gilt überdies: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n \geq 0 \implies G \geq 0$ wegen Aussage 2.5)e) der Vorlesung.

b) **Behauptung:** $G = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$

Setzen wir $n_k := k + 1$ so ist die Folge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}_0} = (a_{k+1})_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Teilfolge der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, also mit Folgerung 2.17) der Vorlesung wie diese konvergent mit demselben Grenzwert $G : a_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G$

Andererseits gilt $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ nach der Rekursionsvorschrift, und es gilt:

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G \xRightarrow{(1)} 1 + a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 + G \xRightarrow{(4)} \sqrt{1 + a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + G}$$

Also:

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \sqrt{1 + a_n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \overset{\text{Eindeutigkeit}}{=} & \sqrt{1 + G} \\ & \uparrow & \\ & \text{des Grenzwerts} & \end{array}$$

Damit:

$$\begin{aligned} G = \sqrt{1 + G} &\iff G^2 = 1 + G \iff G^2 - G = 1 \iff G^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}G + \frac{1}{4} = \\ &\iff \left(G - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \iff \left|G - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{5} \iff G = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}) \\ \text{und da } \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) < 0 \text{ und } G \geq 0 \text{ muß } G &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \text{ gelten.} \end{aligned}$$

c) Nun setzen wir $a_0 = c > 0$ statt $a_0 = 0$.

Da wir den Grenzwert $G = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ nur aus der Tatsache, daß die Folge konvergiert und der Rekursionvorschrift berechnet haben, d.h. der Rekursionsanfang dabei keine Rolle spielte, wird also im Falle der Konvergenz der Folge der Grenzwert immer $G = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ sein. Wir müssen also nur untersuchen, wie die Eigenschaft zu konvergieren von der Anfangsbedingung $a_0 = c$ abhängt.

Untersuchen wir zunächst die Monotonie:

Ist $2 > a_{n+1} \geq a_n \geq 0$, so

$$(*) \quad 2 > \sqrt{1 + 2} \underset{2 > a_{n+1}}{>} \sqrt{1 + a_{n+1}} = a_{n+2} \quad \text{und}$$

$$(**) \quad a_{n+2} \underset{\text{Def.}}{=} \sqrt{1 + a_{n+1}} \underset{\substack{\text{Wurzel} \\ \text{monoton}}}{\geq} \sqrt{1 + a_n} \underset{\text{Def.}}{=} a_{n+1}, \quad \text{also}$$

$$2 > a_{n+2} \geq a_{n+1} \geq 0$$

d.h. der Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$ beim Beweis der Monotonie klappt immer. Wenn also zusätzlich im Induktionsanfang garantiert wird, daß $2 > a_1 \geq a_0 \geq 0$, so ergibt sich, daß die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton wächst und nach oben beschränkt ist. Untersuchen wir also diese Bedingung für $a_0 = c$:

$$\begin{aligned} a_0 \leq a_1 &\iff c \leq \sqrt{1 + c} \underset{c \geq 0}{\iff} c^2 \leq 1 + c \iff c^2 - c - 1 \leq 0 \iff \\ &\iff \left(c - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\right) \cdot \left(c - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\right) \leq 0 \end{aligned}$$

Denn wie oben berechnet ist ja

$$c^2 = c + 1 \iff c = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}), \text{ also nach dem Satz von Vieta}$$

$c^2 - c - 1 = (c - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})) \cdot (c - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}))$ (siehe Satz (1.7)a) der Vorlesung.)

Nun ist $c \geq 0$, aber $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) < 0$, weshalb $c \leq \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) < 0$ nicht möglich ist, also $c > \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \implies c - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) > 0$ Damit:

$$(c - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})) \cdot (c - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})) \leq 0 \iff c - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \leq 0$$

(Wenn ein Produkt $a \cdot b \leq 0$, so muß einer der Faktoren ≤ 0 sein.)

Damit haben wir gezeigt: $a_0 = c \leq a_1 \iff 0 \leq c \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$

Es ist für solche c aber sogar $a_1 = \sqrt{1+c} < 2$ richtig, denn $c \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \implies 1 + c \leq 1 + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) < \frac{1}{2}(3 + 5) = 4 \implies a_1 = \sqrt{1+c} < \sqrt{4} = 2$.

Somit gilt sogar für $c \geq 0$:

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt (durch 2) \iff
 $(*)$

$$\iff a_0 = c \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

Ebenso folgt für $c \geq 0$:

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton fallend und nach unten beschränkt (durch 0) \iff
 $(**)$

$$\iff a_0 = c \geq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

Stets also ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergent mit dem Grenzwert $G = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

34. (4 Punkte)

Sei $a > 0$, $x_0 \geq \sqrt{a}$ und $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ ($n \in \mathbb{N}_0$).

(a) **Behauptung:** $\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_n \geq \sqrt{a}$

Beweis:

Induktion nach n :

Induktionsanfang $n = 0$: $x_0 \geq \sqrt{a} > 0$ gilt nach Voraussetzung.

Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$:

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $x_n \geq \sqrt{a} > 0$. Dann folgt:

$$x_{n+1} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{1}{2} \underbrace{\left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)}_{\substack{\text{Nach IV:} \\ x_n \geq \sqrt{a} > 0}} \stackrel[\text{Aufg. 24}]{\text{AGM-Ungl.}} \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$$

Man beachte, daß die Induktion nicht für $x_n \geq \sqrt{a}$ nötig war, sondern nur, um die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel anwenden zu können, wo gefordert wird, daß die beteiligten reellen Zahlen alle nicht-negativ sind.

b) **Behauptung:** Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist monoton fallend.

Beweis:

Zu zeigen: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} \leq x_n$. Also:

$$x_{n+1} \leq x_n \stackrel{\text{Def.}}{\iff} \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \leq x_n \iff x_n + \frac{a}{x_n} \leq 2x_n \iff \frac{a}{x_n} \leq x_n \stackrel[\text{nach a)}]{x_n > 0} \iff$$

$$a \leq x_n^2 \stackrel[x_n > 0]{1.20) \text{ VL}}{\iff} \sqrt{a} \leq x_n$$

Letztere Aussage ist nach Aufgabenteil a) immer wahr, wegen der Äquivalenzumformungen also auch $x_{n+1} \leq x_n$ q.e.d.

c) **Behauptung:** $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{a}$

Beweis:

Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist nach Teil a) nach unten beschränkt (durch \sqrt{a}) und nach Teil b) monoton fallend, nach dem Konvergenzsatz (siehe VL 2.15) oder (\clubsuit) in Aufgabe 33) ist sie also konvergent: Es gibt $G \in \mathbb{R}$ mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G$.

Zudem gilt nach Teil a) : $\forall n \in \mathbb{N}_0 \ x_n \geq \sqrt{a} \xRightarrow{\text{VL 2.15)e}} G \geq \sqrt{a} > 0$.

Mit den gleichen Methoden wie in Aufgabe 33 berechnen wir nun den Grenzwert: Die Teilfolge $(x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert ebenfalls gegen G (VL 2.17a), und nach den Rechenregeln für Grenzwerte folgt:

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G \neq 0 \xRightarrow{(1)} \frac{a}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a}{G} \xRightarrow{(1)} \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(G + \frac{a}{G} \right),$$

also:

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \stackrel{=}{=} & \frac{1}{2} \left(G + \frac{a}{G} \right) \\ & \uparrow & \\ & \text{Eindeutigkeit} & \\ & \text{des Grenzwerts} & \end{array}$$

Also gilt:

$$G = \frac{1}{2} \left(G + \frac{a}{G} \right) \iff 2G = G + \frac{a}{G} \iff G = \frac{a}{G} \iff G^2 = a \xLeftrightarrow{G>0} G = \sqrt{a}$$

q.e.d

35. Sei $a > 0$, $x_0 > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ und $x_{n+1} = \frac{1}{k} \left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right)$ ($n \in \mathbb{N}_0$)

Behauptung: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt[k]{a}$

Beweis:

Zunächst gilt $\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_n > 0$.

Induktion nach n :

Induktionsanfang $n = 0$: klar, da $x_0 > 0$ vorausgesetzt wurde.

Induktionsschritt $n \mapsto n+1$:

Induktionsvoraussetzung: Es sei für ein $n \in \mathbb{N}_0$ $x_n > 0$ wahr. Dann folgt mit $k \geq 2$:

$$(k-1)x_n \underset{\text{IV}}{> 0} \text{ und } \frac{a}{x_n^{k-1}} \underset{\text{IV}}{> 0} \implies x_{n+1} = \frac{1}{k} \underbrace{\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right)}_{k \text{ Summanden}} > 0 \quad \text{q.e.d.}$$

Damit sind $x_n > 0$ und $\frac{a}{x_n^{k-1}} > 0$, d.h. mit der AGM-Ungleichung aus Aufgabe 24 folgt:

$$x_{n+1} = \frac{1}{k} \left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right) \underset{\text{AGM-Ungl.}}{\geq} \sqrt[k]{\underbrace{x_n \cdot x_n \cdots x_n}_{(k-1)\text{mal}} \cdot \frac{a}{x_n^{k-1}}} = \sqrt[k]{x_n^{k-1} \cdot \frac{a}{x_n^{k-1}}} = \sqrt[k]{a}$$

Also gilt: $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq \sqrt[k]{a} \quad (*)$

Insbesondere folgt $x_1 \geq \sqrt[k]{a}$, so daß man sich auf den Fall $x_0 \geq \sqrt[k]{a}$ beschränken könnte: Man lasse einfach den ersten Iterationsschritt aus und starte mit der Rekursion bei x_1 statt bei x_0 . Dies entspricht dem Übergang zur Teilfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die aber dasselbe Konvergenzverhalten zeigt wie die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ selbst.

Nun zeigen wir ganz analog zu Aufgabe 34, daß die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton fällt und berechnen wie dort den Grenzwert.

Es ist nach eben $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq \sqrt[k]{a} > 0$.

Zu zeigen: $\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} \leq x_n$.

Nun gilt aber:

$$\begin{aligned} 0 \leq x_{n+1} \leq x_n &\stackrel{\text{Def.}}{\iff} 0 \leq x_{n+1} = \frac{1}{k} \left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right) \leq x_n \iff \\ &\stackrel{k \geq 2}{\iff} 0 \leq (k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \leq k \cdot x_n \iff \frac{a}{x_n^{k-1}} \leq x_n \iff \\ &\stackrel{\text{da } x_n^{k-1} > 0}{\iff} a \leq x_n \cdot x_n^{k-1} = x_n^k \stackrel{x \geq 0}{\iff} \sqrt[k]{a} \leq \sqrt[k]{x_n^k} = x_n \\ &\quad \text{Wurzel} \\ &\quad \text{monoton} \end{aligned}$$

und das wurde oben in (*) bewiesen. Also ist die dazu äquivalente Aussage $x_{n+1} \leq x_n$ ebenfalls wahr und die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ damit monoton fallend. Zudem ist sie mit $x_n \geq \sqrt[k]{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auch nach unten beschränkt, so daß mit der Aussage über die Konvergenz beschränkter monotoner Folgen aus Aufgabe 33 (♣) bzw. Vorlesung Satz 2.17) folgt: Es gibt ein $g \in \mathbb{R}$ mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$.

Bleibt die Bestimmung von g .

Wieder betrachten wir die Teilfolge $(x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die wie diese gegen den Grenzwert g konvergiert (VL Satz 2.17). Andererseits:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{k} \left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right) \quad \text{und} \\ x_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} g \stackrel{(1)}{\implies} (k-1)x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (k-1)g \quad \text{und} \quad x_n^{k-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g^{k-1} \neq 0 \implies \\ &\stackrel{(1)}{\implies} \frac{a}{x_n^{k-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a}{g^{k-1}} \stackrel{(1)}{\implies} \frac{1}{k} \left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \left((k-1)g + \frac{a}{g^{k-1}} \right) \end{aligned}$$

Also wieder:

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & \frac{1}{k} \left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ g & \stackrel{\uparrow}{=} & \frac{1}{k} \left((k-1)g + \frac{a}{g^{k-1}} \right) \\ & \text{Eindeutigkeit} & \\ & \text{des Grenzwerts} & \end{array}$$

Somit gilt für den Grenzwert g die Beziehung

$$g = \frac{1}{k} \left((k-1)g + \frac{a}{g^{k-1}} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{also:} \\ g &= \frac{1}{k} \left((k-1)g + \frac{a}{g^{k-1}} \right) \stackrel{\cdot k \cdot g^{k-1}}{\iff} kg^k = (k-1)g \cdot g^{k-1} + a = (k-1)g^k + a \iff \\ &\iff g^k = a \stackrel{\text{da } g > 0}{\iff} g = \sqrt[k]{a} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$