

## Analysis für Informatiker und Statistiker

### Aufgabe 56 (4 Punkte)

Sei  $f : I \rightarrow I$  stetig, wobei  $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$  ein abgeschlossenes Intervall ist.

- (a) Zeigen Sie:  $f$  hat einen Fixpunkt, d.h.  $\exists x \in I : f(x) = x$ .  
(Hinweis: Zwischenwertsatz)
- b) Widerlegen Sie die Aussage a) im Fall  $I = \mathbb{R}$  durch ein Gegenbeispiel.

### Aufgabe 57 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

- (a)  $f(x) = a^{\sqrt{x^2+1}}$  ( $a > 0, x \in \mathbb{R}$ )
- (b)  $f(x) = \ln(x^4 + 1) \cdot \ln(\sqrt{x} + 1)$  ( $x > 0$ )
- (c)  $f(x) = \sqrt[n]{\frac{x}{\ln x}}$  ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, x > 1$ )
- (d)  $f(x) = x^{(x^x)}$  ( $x > 0$ )

### Aufgabe 58 (4 Punkte)

Sei  $x \geq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  und  $f(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$  ( $x \in \mathbb{R}$ )

- (a) Bestimmen Sie die Lage der Extrema von  $f$  und berechnen Sie das Minimum von  $f$ .
- (b) Zeigen Sie, daß  $f$  genau 2 Nullstellen in  $[1, \infty)$  besitzt.

### Aufgabe 59 (4 Punkte)

Sei  $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$  ( $x > 0$ ).

- (a) Bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ . Zeigen Sie, dass  $f$  genau ein Maximum besitzt und berechnen Sie die Maximumstelle.
- (b) Sei  $a > 1, a \neq e$ . Zeigen Sie, dass die Gleichung  $a^x = x^a$  genau eine von  $a$  verschiedene positive Lösung besitzt. (Hinweis: Veranschaulichen Sie sich die Bedingung  $f(x) = f(a)$  im Graphen von  $f$ ).
- (c) Geben Sie alle Lösungen  $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$  der Gleichung  $m^n = n^m$  an.

*Bitte wenden!*

### Aufgabe 60\*

Sei  $I$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal differenzierbare Funktion mit  $f''(x) \geq 0$  ( $x \in I$ ). Zeigen Sie:

- (a) Für  $a, b, x \in I$  mit  $a < x < b$  gilt

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

(Hinweis: Mittelwertsatz, Monotonie von  $f'$ )

- (b)  $f$  ist konvex, d.h.

$$f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b) \quad (t \in [0, 1], a, b \in I)$$

(Hinweis: (a))

- (c) Für  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$  mit  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$  und  $a_1, \dots, a_n \in I$  gilt

$$f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) \leq \lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n)$$

(Hinweis: Vollständige Induktion und (b))

- (d) Für  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$  mit  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$  und  $a_1, \dots, a_n > 0$  gilt die folgende Verallgemeinerung der Ungleichung vom arithmetisch-geometrischen Mittel:

$$a_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot a_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$$

(Hinweis: (c) mit  $f(x) = -\ln x$  ( $x > 0$ ))

**Abgabe einzeln oder zu zweit:** Montag, 4.2.2008 bis 16<sup>15</sup> Uhr,  
Übungskasten vor der Bibliothek im 1. Stock

---

\*Diese Zusatzaufgabe soll weitere Anwendungsmöglichkeiten des Vorlesungsstoffes aufzeigen. Sie wird aber nicht korrigiert und ist auch nicht prüfungsrelevant.