

Analysis für Informatiker und Statistiker

Die folgende Übungsaufgabe wird nicht mehr korrigiert, sie dient der Vertiefung des zuletzt behandelten Vorlesungsstoffes und könnte klausurrelevant sein.

Aufgabe 61 (8 Punkte)

Setze $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{(k + \frac{1}{2})\pi : k \in \mathbb{Z}\}$).

Zeigen Sie:

- (a) $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{(k + \frac{1}{2})\pi : k \in \mathbb{Z}\}$)
- (b) Die Funktion \tan ist in $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ stetig, differenzierbar und streng monoton wachsend.
- (c) $\tan] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[= \mathbb{R}$.
- (d) $\tan] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ besitzt eine stetige und streng monoton wachsende Umkehrfunktion mit Definitionsbereich \mathbb{R} . (Bez. \arctan).
- (e) $\arctan(0) = 0$, $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.
- (f) \arctan ist differenzierbar und es gilt

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$(g) \quad \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (|x| < 1).$$

$$(h) \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (\text{Leibniz-Reihe})$$

Die folgenden 8 Aufgaben sind gedacht zur Unterstützung der Klausurvorbereitung. Sie bestehen zum größten Teil aus früheren Klausuraufgaben und sollen eine grobe Einschätzung des Arbeitsumfangs und Schwierigkeitsgrads ermöglichen. Es muss allerdings damit gerechnet werden, dass auch Aufgaben zu anderen Themen als hier gestellt werden. Alle Aufgaben zählen 6 Punkte, mit 18 Punkten oder mehr ist die Klausur bestanden; falls mindestens 36 von 48 Punkten erzielt werden, wird die Bestnote vergeben.

1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$(a) \quad 3^n \geq n + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(b) \quad \sum_{k=2}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - 2 \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$$

2. Zeigen Sie mit dem Binomischen Satz:

$$(a) \quad 3^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \quad (n \in \mathbb{N})$$

Bitte wenden!

$$(b) \quad (1 + x^2)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} x^4 \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$$

3. Gegeben sei eine Lipschitzstetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + x$ ist Lipschitzstetig.

(b) Ist $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + x^2$ Lipschitzstetig? (Beweis!)

4. Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$a_n = \sqrt[n]{4^n \cdot n^2}, \quad b_n = \frac{2^n + 3n^4}{\sqrt{2^n + 3^{2n}}}, \quad c_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n}.$$

Bestimmen Sie ihren jeweiligen Grenzwert.

5. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz

$$(a) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2k^2 - 1}}$$

$$(b) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

$$(c) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4^k}{k!}$$

6. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen

$$(a) \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$$

$$(b) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{k}\right)^k k! x^k$$

(Hinweis: Benutzen Sie ohne Beweis: $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{k!}}{k} = \frac{1}{e}$.)

$$(c) \quad \sum_{k=1}^{\infty} 4^{(k^2)} x^k$$

7. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen

$$(a) \quad f(x) = \ln \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) \quad (x > 1)$$

$$(b) \quad g(x) = (\sqrt{2})^x \cdot x^{\sqrt{2}} \quad (x > 0)$$

$$(c) \quad h(x) = x^{\cos(x^2)} \quad (x > 0)$$

8. Es sei die Funktion $f :]0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}[$ definiert durch $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

(a) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion an der Stelle $x = e$ ihren maximalen Wert annimmt.

(c) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\frac{\ln(x)}{x} = y \quad \text{für } y \in (0, \frac{1}{e})$$

zwei Lösungen besitzt und für $y \leq 0$ genau eine Lösung besitzt.

KEINE ABGABE! Ein Lösungsvorschlag soll im Internet veröffentlicht werden.