

Analysis für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 36 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Grenzwerte

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{n+1}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n \ln(n+2) - n \ln n}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - n}{n^2 + n}\right)^n$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2n} + n^n + 1}{(n^2 + n + 1)^n}$

Aufgabe 37 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie die linke Ungleichung der Aussage

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(Hinweis: Verwenden Sie im Induktionsschritt die Ungleichung $(1 + \frac{1}{n})^n \leq e$.)

(b) Berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}$.

(c) Berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$.

(d) Benutzen Sie (ohne Beweis) die Stirlingformel $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1$ um den Grenzwert in (c) zu bestimmen.

Aufgabe 38 (4 Punkte)

Der hyperbolische Sinus $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
Zeigen Sie dass \sinh bijektiv ist und geben Sie die Umkehrabbildung an.

Bitte wenden!

Aufgabe 39 (4 Punkte)

Im folgenden bezeichne $a^x := \exp(x \ln a)$ ($x \in \mathbb{R}$) die Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$. Wie üblich sei $0^n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) und $0^0 := 1$.

Zeigen Sie:

(a) $(ab)^x = a^x b^x$ mit $a > 0, b > 0, x \in \mathbb{R}$

(b) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ ($a > 0, x, y \in \mathbb{R}$)

(c) $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$ ($a > 0, a \neq 1, x > 0, y \in \mathbb{R}$)

(d) $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ mit $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1, x > 0$.

(e) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller Zahlen mit $a_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$) und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

(f) Die Aussage in (e) ist im allgemeinen *nicht* richtig, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Aufgabe 40*

(a) Zeigen Sie: $\left(\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

(b) Folgern Sie aus (a): $\left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

(c) Zeigen Sie die rechte Ungleichung der Aussage

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Abgabe einzeln oder zu zweit: Montag, 7.1.2008 bis 16¹⁵ Uhr,
Übungskasten vor der Bibliothek im 1. Stock

*** FROHE WEIHNACHTEN ***

*Diese Zusatzaufgabe soll weitere Anwendungsmöglichkeiten des Vorlesungsstoffes aufzeigen. Sie wird aber nicht korrigiert und ist auch nicht prüfungsrelevant.