

### Analysis für Informatiker und Statistiker

#### Aufgabe 41 (4 Punkte)

Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkte Folgen mit  $a_n \geq 0$  und  $b_n \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

- (a) Zeigen Sie:  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$ .
- (b) Geben Sie ein Beispiel an, für das in (a) “ $<$ ” gilt.
- (c) Gilt die Aussage in (a) auch ohne die Voraussetzung  $a_n \geq 0$ ,  $b_n \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ?

#### Aufgabe 42 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Reihen

- (a)  $\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)x^k$  für  $|x| < 1$ ,
- (b)  $\sum_{k=0}^{\infty} kx^{2k-1}$  für  $|x| < 1$ ,
- (c)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!}$  für  $x \in \mathbb{R}$ ,
- (d)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$  für  $x \in \mathbb{R}$ .

Hinweis zu (a),(b): Aufgabe 16c; zu (d): Summe von Exponentialfunktionen.

#### Aufgabe 43 (4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

- (a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}$ ,
- (b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^k}{2^k}$ ,
- (c)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3 + 1}$ .
- (d)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2 + 1}$ .

*Bitte wenden!*

**Aufgabe 44** (4 Punkte)

Zeigen Sie die Ungleichung

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right| \leq \frac{x^2}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|x|^k}{k!} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2, x \in \mathbb{R}).$$

(Hinweis: Beweis zu Satz 2.21b.)

**Aufgabe 45\***

Sei  $B \in \mathbb{N}$ ,  $B \geq 2$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $z_1, \dots, z_{l+p} \in \{0, \dots, B-1\}$  und

$$x = (0.z_1 z_2 \dots z_l \overline{z_{l+1} \dots z_{l+p}})_B$$

in der Periodenschreibweise aus Aufgabe 30. Zeigen Sie:

$$(a) \quad x = \frac{(z_1 \dots z_l)_B}{B^l} + \frac{(z_{l+1} \dots z_{l+p})_B}{B^l(B^p - 1)}.$$

Darin bezeichnen  $(z_1 \dots z_l)_B$  und  $(z_{l+1} \dots z_{l+p})_B$  jeweils die aus den Ziffern  $z_k$  gebildete ganze Zahl zur Basis  $B$ , beispielsweise gilt  $(z_1 \dots z_l)_B = \sum_{i=1}^l z_i B^{l-i}$ .

(b) Berechnen Sie den Wert von  $x$ , falls  $z_{l+1} = z_{l+2} = \dots = z_{l+p} = B-1$ .

**Abgabe einzeln oder zu zweit:** Montag, 14.1.2008 bis 16<sup>15</sup> Uhr,  
Übungskasten vor der Bibliothek im 1. Stock

---

\*Diese Zusatzaufgabe soll weitere Anwendungsmöglichkeiten des Vorlesungsstoffes aufzeigen. Sie wird aber nicht korrigiert und ist auch nicht prüfungsrelevant.