

Lösungsvorschläge zu Analysis I für Informatiker

Blatt 9

41. (4 Punkte) Für diese Aufgabe brauchen wir folgende Aussagen der Vorlesung:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann:

(*) $s \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \iff (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} s$

(**) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \max\{s \in \mathbb{R} \mid s \text{ Häufungspunkt von } (a_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$

Seien nun im folgenden $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkte Folgen reeller Zahlen mit $a_n \geq 0$ und $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) **Behauptung:** $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n)$

Beweis:

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind beschränkte Folgen, also gibt es $K, L > 0$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$: $|a_n| \leq K$ und $|b_n| \leq L \implies |a_n b_n| = |a_n| |b_n| \leq K \cdot L \implies (a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ebenfalls eine beschränkte Folge, besitzt also nach Vorlesung $\rho := \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \in \mathbb{R}$.

Nach (*) oben gibt es also eine Teilfolge $(a_{n_k} b_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} b_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \rho$.

Nun ist $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ist also wie diese beschränkt, besitzt damit nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß wieder eine konvergente Teilfolge $(a_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$, d.h. es gibt $s \in \mathbb{R}$ mit $a_{n_{k_l}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} s$; insbesondere ist nach (*) damit s ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ebenso ist $(b_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ist also beschränkt und besitzt wieder nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(b_{n_{k_l p}})_{p \in \mathbb{N}}$ mit

$$b_{n_{k_l p}} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} t \in \mathbb{R} \quad (\bullet)$$

Da $(a_{n_{k_l p}})_{p \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ ist und Teilfolgen konvergenter Folgen wieder konvergieren mit demselben Grenzwert, folgt

$$a_{n_{k_l p}} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} s = \lim_{l \rightarrow \infty} (a_{n_{k_l}}) \quad (\bullet \bullet)$$

Da $(a_{n_{k_l p}} \cdot b_{n_{k_l p}})_{p \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_{n_k} b_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ folgt ebenso

$$a_{n_{k_l p}} \cdot b_{n_{k_l p}} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \rho = \lim_{k \rightarrow \infty} (a_{n_k} b_{n_k})$$

Wegen (\bullet) und $(\bullet\bullet)$ gilt aber auch $a_{n_{k_l p}} \cdot b_{n_{k_l p}} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} s \cdot t \implies \rho = s \cdot t \quad (\clubsuit)$.

Bis hierher haben wir die Voraussetzung $a_n \geq 0$ und $b_n \geq 0$ nicht benutzt; es gilt also alles für beliebige beschränkte reelle Zahlenfolgen.

Es gelte nun zusätzlich $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0 \wedge b_n \geq 0 \implies$

$$\begin{aligned} \forall l \in \mathbb{N} : a_{n_{k_l}} \geq 0 & \xRightarrow[\text{Satz 2.2c)]}{\text{VL}} s \geq 0 \text{ und Häufungspunkt von } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \forall p \in \mathbb{N} : b_{n_{k_l p}} \geq 0 & \xRightarrow{\text{dito}} t \geq 0 \text{ und Häufungspunkt von } (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \forall k \in \mathbb{N} : a_{n_k} b_{n_k} \geq 0 & \xRightarrow{\text{dito}} \rho \geq 0 \end{aligned}$$

Damit gilt aber wegen $(**)$:

$$\left. \begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) \text{ größter Häufungspunkt von } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} & \implies 0 \leq s \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) \text{ größter Häufungspunkt von } (b_n)_{n \in \mathbb{N}} & \implies 0 \leq t \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) \end{aligned} \right\} \implies$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \rho = s \cdot t \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) \quad \text{q.e.d.}$$

(b) Ein Beispiel für $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) < \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n)$ in Teil (a):

Definiere:

$$a_n := \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{und} \quad b_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Dann gilt $a_n \cdot b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0$

(Konvergente Folgen haben genau einen Häufungspunkt, nämlich den Grenzwert der Folge).

Andererseits:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : a_{2n+1} = 1 & \implies \text{die Teilfolge } (a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } 1 \xRightarrow{(**)} \\ & \xRightarrow{(**)} 1 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) \\ \forall n \in \mathbb{N} : b_{2n} = 1 & \implies \text{die Teilfolge } (b_{2n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } 1 \xRightarrow{(**)} \\ & \xRightarrow{(**)} 1 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) \end{aligned}$$

Also folgt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0 < 1 = 1 \cdot 1 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n)$$

(c) Wenn die Voraussetzung $a_n \geq 0$ und $b_n \geq 0$ nicht erfüllt ist, stimmt die Aussage im allgemeinen nicht mehr.

Betrachte dazu den Beweis in (a) bis zum Punkt (\clubsuit) . Bis dahin wurde die Voraussetzung über a_n und b_n nicht benutzt. Es gelte nun

$a_n \leq 0$ und $b_n \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \implies \forall n \in \mathbb{N} : a_n \cdot b_n \geq 0$.

Dann:

$$\begin{aligned} \forall l \in \mathbb{N} : a_{n_{k_l}} \leq 0 & \xRightarrow[\text{Satz 2.2c)]}{\text{VL}} s \leq 0 \text{ und } s \text{ Häufungspunkt von } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \forall p \in \mathbb{N} : b_{n_{k_l p}} \leq 0 & \xRightarrow{\text{dito}} t \leq 0 \text{ und } t \text{ Häufungspunkt von } (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \forall k \in \mathbb{N} : a_{n_k} b_{n_k} \geq 0 & \xRightarrow{\text{dito}} \rho \geq 0 \end{aligned}$$

Damit gilt mit (**) und da alle $a_n, b_n \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) \text{ grösster Häufungspunkt von } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} &\implies s \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) \leq 0 \\
 \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) \text{ grösster Häufungspunkt von } (b_n)_{n \in \mathbb{N}} &\implies t \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) \leq 0 \\
 \left. \begin{aligned} t \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) \leq 0 \wedge s \leq 0 &\implies st \geq s \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) \geq 0 \\ s \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) \leq 0 \wedge \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) \leq 0 &\implies s \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) \geq 0 \end{aligned} \right\} \\
 \implies st \geq s \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) &\implies \\
 \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \rho = st \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) &
 \end{aligned}$$

Ebenso wie in (a) ist in dieser Ungleichung „>“ möglich:

Definiere

$$a_n = b_n = \begin{cases} -1 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \implies 0 = a_{2n+1} = b_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies$$

$$\begin{aligned}
 \implies 0 \text{ ist Häufungspunkt von } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ und } (b_n)_{n \in \mathbb{N}} &\xRightarrow{(**)} \\
 0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) \leq 0 &\implies \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) = 0
 \end{aligned}$$

Ferner:

$$a_n b_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \implies 0 = a_{2n} b_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \xRightarrow{(**)}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \geq 1 > 0 = 0 \cdot 0 = \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n).$$

Falls a_n, b_n mit beliebigen Vorzeichen versehen sind, ist gar keine allgemeine Aussage über die relative Lage der $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n)$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n)$ mehr möglich.

42. (4 Punkte) Wir verwenden hier die schon im Tutorium bewiesene Aussage

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{für } |x| < 1$$

Beweis von (*):

$$\text{Nach Übungsaufgabe 16c) Blatt 4 gilt für } q \in \mathbb{R}, q \neq 1, n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n i q^i = \frac{nq^{n+2} - (n+1)q^{n+1} + q}{(q-1)^2}$$

Ersetze hier nun q durch x , so folgt für die Partialsummenfolge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}.$$

Nun gilt nach Vorlesung 2.7e) : $l \in \mathbb{N}_0, |x| < 1 \implies n^l x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies$ die zwei Folgen $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}, (nx^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind Nullfolgen $\xRightarrow[\text{sätze}]{\text{Grenzwert-}} nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \xRightarrow{\text{dito}}$

$$S_n = \sum_{k=1}^n kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{0+x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{q.e.d.}$$

(a) **Behauptung:** $\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)x^k = \frac{x^2+x}{(1-x)^2} \quad \text{für } |x| < 1$

Beweis:

Da $|x| < 1 \implies x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ liefert die geometrische Reihe:

$$t_n = \sum_{k=1}^n x^k = \sum_{k=0}^n x^k - x^0 \stackrel{\text{VL}}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{1-(1-x)}{1-x} = \frac{x}{1-x}.$$

Ferner nach (*) : $s_n = \sum_{k=1}^n kx^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{x}{(1-x)^2}.$

Also gilt für die Partialsummenfolge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)x^k$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (2k-1)x^k = \sum_{k=1}^n 2kx^k - \sum_{k=1}^n x^k = 2 \cdot \sum_{k=1}^n kx^k - \sum_{k=1}^n x^k = \\ &= 2 \cdot s_n - t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} = \frac{2x - x(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{x^2+x}{(1-x)^2} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

(b) **Behauptung:** $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{2k-1} = \frac{x}{(1-x^2)^2} \quad \text{für alle } |x| < 1$

Beweis:

Betrachte wieder die Partialsummenfolge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $S_n = \sum_{k=1}^n kx^{2k-1}.$

falls $x = 0$: $S_n = \sum_{k=1}^n k \cdot 0^{2k-1} \stackrel{2k-1 \geq 1}{=} 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = \frac{0}{(1-0^2)^2}$

falls $x \neq 0$: $S_n = \sum_{k=1}^n kx^{2k-1} = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{x^{2k}}{x} = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^n k \cdot (x^2)^k.$

Nun gilt nach (*) für $|y| < 1$: $s_n = \sum_{k=1}^n ky^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{y}{(1-y)^2},$ und da $|x| < 1$ ist auch

$|x^2| < 1$; setze also in der Partialsummenfolge in (*) $y := x^2$; dann folgt

$$s_n = \sum_{k=1}^n k(x^2)^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(1-x^2)^2}$$

Also:

$$S_n = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^n k \cdot (x^2)^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{x}{(1-x^2)^2} \quad \text{q.e.d.}$$

(c) **Behauptung:** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!} = xe^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Beweis:

In der Vorlesung wurde gezeigt, daß für die Exponentialreihe und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$e_n := \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x, \text{ d.h. } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Also folgt für die Partialsummenfolge der zu untersuchenden Reihe:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^n \frac{x \cdot x^{k-1}}{(k-1)!} = x \cdot \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = x \cdot \sum_{0 \leq k-1 \leq n-1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &=_{l:=k-1} x \cdot \sum_{l=0}^{n-1} \frac{x^l}{l!} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{VL}} x \cdot e^x \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

(d) **Behauptung:** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Beweis:

Wie in Teil (c) gilt:

$$e_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}; \text{ also auch}$$

$$t_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-x}.$$

Also:

$$\begin{aligned} e_{2n} + t_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{2n} \overbrace{\left[1 + (-1)^k \right]}^{\substack{= 2 \\ \text{für } k \text{ gerade}}} \frac{x^k}{k!} = \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{2n} 2 \cdot \frac{x^k}{k!} = 2 \cdot \sum_{0 \leq k=2l \leq 2n} \frac{x^k}{k!} =_{k=2l} 2 \cdot \sum_{0 \leq l \leq n} \frac{x^{2l}}{(2l)!} = 2 \sum_{l=0}^n \frac{x^{2l}}{(2l)!} = 2S_n \implies \\ \implies S_n &= \frac{1}{2}(e_{2n} + t_{2n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{Grenzwertsätze}} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x). \end{aligned}$$

Denn die Folge $(e_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert als Teilfolge der Partialsummenfolge der Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ebenfalls gegen e^x , ebenso die Folge $(t_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen e^{-x} . q.e.d.

43. (4 Punkte)

(a) **Behauptung:** Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}$ konvergiert.

Beweis:

Wurzelkriterium: $\sqrt[k]{\frac{k^3}{3^k}} = \frac{\sqrt[k]{k^3}}{\sqrt[k]{3^k}} = \frac{(\sqrt[k]{k})^3}{3} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{3}$ (da ja nach VL $\sqrt[k]{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$).

Damit gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$:

$$\left| \sqrt[k]{\frac{k^3}{3^k}} - \frac{1}{3} \right| < \frac{1}{2} \implies \sqrt[k]{\frac{k^3}{3^k}} - \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \implies 0 \leq \sqrt[k]{\frac{k^3}{3^k}} < \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} =: q < 1.$$

Nach Wurzelkriterium liegt also Konvergenz vor.

Quotientenkriterium: Da für alle $k \in \mathbb{N}$: $a_k = \frac{k^3}{3^k} \neq 0$ ist das Quotientenkriterium anwendbar und es gilt:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{(k+1)^3 \cdot 3^k}{3^{k+1} \cdot k^3} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{k+1}{k} \right)^3 = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^3 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \implies$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{1}{3} < 1 \xRightarrow{\text{VL}} \text{die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium.}$$

Ohne Beweis: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3^k} = \frac{33}{8}$

(b) **Behauptung:** Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^k}{2^k}$ konvergiert.

Beweis:

$$\forall k \in \mathbb{N} : |2 + (-1)^k| \leq 2 + |(-1)^k| = 2 + 1 = 3 \implies$$

$$\sqrt[k]{\left| \frac{2 + (-1)^k}{2^k} \right|} \leq \sqrt[k]{\frac{3}{2^k}} = \frac{\sqrt[k]{3}}{\sqrt[k]{2^k}} = \frac{\sqrt[k]{3}}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \text{ für alle } k \geq 2 \implies$$

$$\implies \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{2 + (-1)^k}{2^k} \right|} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} =: q < 1 \implies \text{die Reihe konvergiert nach dem Wurzelkriterium.}$$

Ohne Beweis: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^k}{2^k} = \frac{5}{3}$

(c) **Behauptung:** Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3 + 1}$ konvergiert.

Beweis:

$$\text{Es ist für alle } k \in \mathbb{N} : k^3 + 1 > k^3 \implies \frac{1}{k^3 + 1} < \frac{1}{k^3} \implies \frac{k}{k^3 + 1} < \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}.$$

Nach Vorlesung ist aber die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent, also liefert das Majorantenkriterium:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \left| \frac{k}{k^3 + 1} \right| \leq \frac{1}{k^2} \wedge \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ konvergiert} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3 + 1} \text{ konvergiert.} \quad \text{q.e.d.}$$

(d) **Behauptung:** Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2 + 1}$ divergiert.

Beweis:

$$k^2 + 1 \leq 2k^2 \iff 1 \leq k^2 \iff k \in \mathbb{N}, \text{ , also gilt für alle } k \in \mathbb{N} : \frac{k}{k^2 + 1} \geq \frac{1}{2k}.$$

Nach Vorlesung ist die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent, sogar eigentlich divergent, d.h. für die Partialsummenfolge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der harmonischen Reihe gilt:

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \cdot s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Damit folgt, daß auch für die Partialsummenfolge der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2 + 1}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2 + 1} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{2} s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2 + 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Insbesondere ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2 + 1}$ divergent.

44. (4 Punkte)

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right| \leq \frac{x^2}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|x|^k}{k!}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right| &= \left| \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k \right| && \text{(Binomische Formel)} \\ &= \left| \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{x^k}{n^k} \right| = \left| \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \left(1 - \frac{n!}{(n-k)! \cdot n^k}\right) \right| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{k=0}^n \frac{|x|^k}{k!} \underbrace{\left|1 - \frac{n!}{(n-k)! \cdot n^k}\right|}_{:= A} && (*) \end{aligned}$$

Für den Ausdruck A gilt nun:

$$A = 1 - \frac{n!}{(n-k)! \cdot n^k} \stackrel{\text{kürzen}}{=} 1 - \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}^{k \text{ Faktoren}}}{n^k} = 1 - \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} =$$

$$= 1 - 1 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{\leq 1} \geq 0$$

(da alle Faktoren ≤ 1)

Also:

$$A = 1 - \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

Andererseits liefert Aufgabe 18a) von Übungsblatt 4:

$$\forall 1 \leq j \leq k-1 < n : 0 \leq \frac{j}{n} < 1 \implies 0 \geq -\frac{j}{n} > -1, \text{ also}$$

$$\prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \geq 1 + \sum_{j=1}^{k-1} \left(-\frac{j}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k-1} j = 1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{k(k-1)}{2}.$$

Damit folgt für A :

$$A = 1 - \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{k(k-1)}{2}\right) = \frac{1}{2n} \cdot k(k-1)$$

Mit diesem Ergebnis gehen wir zurück in unsere ursprüngliche Abschätzung und fahren bei (*) fort:

$$\begin{aligned}
 (*) &= \sum_{k=0}^n \frac{|x|^k}{k!} \underbrace{\left(1 - \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)\right)}_{= A} \\
 &\leq \sum_{k=0}^n \frac{|x|^k}{k!} \cdot \frac{k(k-1)}{2n} \\
 &= \sum_{k=2}^n \frac{|x|^k}{k!} \cdot \frac{k(k-1)}{2n} \quad (\text{Summanden} = 0 \text{ für } k=0 \text{ und } k=1) \\
 &\stackrel{\text{kürzen}}{=} \frac{1}{2n} \cdot \sum_{k=2}^n \frac{|x|^k}{(k-2)!} \quad \stackrel{\text{Index-}}{\text{transf.}} \quad \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|x|^{k+2}}{k!} \\
 &= \frac{|x|^2}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|x|^k}{k!} \quad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

45. Sei $B \in \mathbb{N}$, $B \geq 2$, $l \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{N}$, $z_1, \dots, z_{l+p} \in \{0, \dots, B-1\}$ und für $0 < x < 1$

$$x = (0.z_1 z_2 \dots \overline{z_l z_{l+1} \dots z_{l+p}})_B = \sum_{k=1}^{\infty} z_k B^{-k} \quad \text{mit} \quad z_{k+p} = z_k \quad \text{für alle} \quad k > l \quad (\clubsuit)$$

Ferner sei $(\clubsuit\clubsuit) \quad (z_1 \dots z_l)_B = \sum_{i=1}^l z_i B^{l-i}$ die aus den Ziffern z_k gebildete ganze Zahl zur Basis B und analog $(z_{l+1} \dots z_{l+p})_B = \sum_{i=1}^p z_{l+i} B^{p-i}$.

Dann gilt:

(a) **Behauptung:**
$$x = \frac{(z_1 \dots z_l)_B}{B^l} + \frac{(z_{l+1} \dots z_{l+p})_B}{B^l(B^p - 1)}$$

Beweis:

Es ist in der B -adischen Darstellung

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} z_k B^{-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

mit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die zugehörige Partialsummenfolge, d.h. $S_n = \sum_{k=1}^n z_k B^{-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$

Sei nun $n = l + N \cdot p$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} S_n &= S_{l+Np} = \sum_{k=1}^l z_k B^{-k} + \sum_{k=l+1}^{l+Np} z_k B^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^l z_k B^{-k} + \sum_{l+1 \leq k \leq l+Np} z_k B^{-k} = \sum_{k=1}^l z_k B^{-k} + \sum_{1 \leq k-l \leq Np} z_k B^{-k} \\ &\stackrel{j:=k-l}{\underset{\text{d.h. } k=j+l}{=}} \sum_{k=1}^l z_k B^{-k} + \underbrace{\sum_{j=1}^{Np} z_{j+l} B^{-(l+j)}}_{= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=ip+1}^{(i+1)p} z_{j+k} B^{-l-j}} \\ &= \sum_{k=1}^l z_k B^{-k} + \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{j=ip+1}^{(i+1)p} z_{j+k} B^{-l-j} \right) \end{aligned}$$

Denn:

$$\{1, \dots, Np\} = \{1, \dots, p\} \cup \{p+1, \dots, 2p\} \cup \dots \cup \{(N-1)p+1, \dots, Np\}$$

d.h. wir teilen die letzte Summe in Pakete zu je p Summanden mit den Indizes 1 bis p , dann $p+1$ bis $2p$ usw. bis schließlich $(N-1)p+1$ bis Np auf und summieren die Teilsummen der jeweiligen Pakete. Damit folgt:

$$\begin{aligned} S_n &= S_{l+Np} = \sum_{k=1}^l z_k B^{-k} + \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{j=ip+1}^{(i+1)p} z_{j+k} B^{-l-j} \right) \\ &= \sum_{k=1}^l z_k B^{-k} + \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{ip+1 \leq j \leq ip+p} z_{j+k} B^{-l-j} \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= S_{l+Np} = \sum_{k=1}^l z_k B^{-k} + \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{1 \leq j-ip \leq p} z_{j+l} B^{-l-j} \right) \\
&= \frac{B^l}{B^l} \sum_{k=1}^l z_k B^{-k} + \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{1 \leq j-ip \leq p} z_{(j-ip)+ip+l} B^{-l-(j-ip)-ip} \right) \\
&\stackrel{\substack{\text{setze} \\ \mu=j-ip}}{=} \frac{\sum_{k=1}^l z_k B^{l-k}}{B^l} + \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{\mu=1}^p \underbrace{z_{\mu+ip+l}}_{=z_{\mu+l}} B^{-l-\mu-ip} \right) \quad (\text{mit der } p\text{-Periodizität } (\clubsuit) \text{ ist } z_{\mu+ip+l} = z_{\mu+l}) \\
&\stackrel{(\clubsuit\clubsuit)}{=} \frac{(z_1 \dots z_l)_B}{B^l} + \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{\mu=1}^p z_{\mu+l} B^{p-\mu-l-(i+1)p} \right) \\
&= \frac{(z_1 \dots z_l)_B}{B^l} + \sum_{i=0}^{N-1} \underbrace{\left(\sum_{\mu=1}^p z_{\mu+l} B^{p-\mu} \right)}_{=(z_{l+1} \dots z_{l+p})_B \text{ gemäß } (\clubsuit\clubsuit)} B^{-l-(i+1)p} \\
&= \frac{(z_1 \dots z_l)_B}{B^l} + (z_{l+1} \dots z_{l+p})_B \cdot B^{-l} \sum_{0 \leq v \leq N-1} B^{-(v+1)p} \\
&= \frac{(z_1 \dots z_l)_B}{B^l} + \frac{(z_{l+1} \dots z_{l+p})_B}{B^l} \cdot \sum_{1 \leq v+1 \leq N} B^{-(v+1)p} \\
&\stackrel{\substack{\text{setze} \\ i:=v+1}}{=} \frac{(z_1 \dots z_l)_B}{B^l} + \frac{(z_{l+1} \dots z_{l+p})_B}{B^l} \cdot \sum_{i=1}^N B^{-ip} \\
&= \frac{(z_1 \dots z_l)_B}{B^l} + \frac{(z_{l+1} \dots z_{l+p})_B}{B^l} \cdot \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{B^p} \right)^i \\
&\stackrel{\substack{\text{geom.} \\ \text{Reihe}}}{=} \frac{(z_1 \dots z_l)_B}{B^l} + \frac{(z_{l+1} \dots z_{l+p})_B}{B^l} \cdot \frac{\frac{1}{B^p} - \left(\frac{1}{B^p} \right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{B^p}}
\end{aligned}$$

Nun gilt:

$$B \geq 2 \text{ und } p \in \mathbb{N} \implies B^p \geq 2 \implies \frac{1}{B^p} < 1 \implies \left(\frac{1}{B^p} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Also:

$$\begin{aligned}
S_{l+Np} &= \frac{(z_1 \dots z_l)_B}{B^l} + \frac{(z_{l+1} \dots z_{l+p})_B}{B^l} \cdot \frac{\frac{1}{B^p} - \left(\frac{1}{B^p} \right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{B^p}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \\
&\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{(z_1 \dots z_l)_B}{B^l} + \frac{(z_{l+1} \dots z_{l+p})_B}{B^l} \cdot \frac{\frac{1}{B^p}}{1 - \frac{1}{B^p}}
\end{aligned}$$

Nun gilt:

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x , d.h. auch die Teilfolge $(S_{l+Np})_{N \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x .
Aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwertes für konvergente Folgen muß also gelten:

$$\begin{aligned} x &= \frac{(z_1 \dots z_l)_B}{B^l} + \frac{(z_{l+1} \dots z_{l+p})_B}{B^l} \cdot \frac{\frac{1}{B^p}}{1 - \frac{1}{B^p}} \\ &= \frac{(z_1 \dots z_l)_B}{B^l} + \frac{(z_{l+1} \dots z_{l+p})_B}{B^l} \cdot \frac{1}{B^p - 1} \\ &= \frac{(z_1 \dots z_l)_B}{B^l} + \frac{(z_{l+1} \dots z_{l+p})_B}{B^l(B^p - 1)} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

- (b) Es seien nun für beliebig vorgegebene $z_1, \dots, z_l \in \{0, \dots, B-1\}$ mit $(B \geq 2)$ und $p \in \mathbb{N}$:

$$z_{l+1} = \dots = z_{l+p} = B-1$$

$$\text{Dann ist } x = \frac{(z_1 \dots z_l)_B + 1}{B^l} = (z_1, \dots, z_{l-1}, z_l + 1)_B, \quad \text{falls } z_l < B-1$$

Beweis:

Nach Teil (a) ist

$$x = \frac{(z_1 \dots z_l)_B}{B^l} + \frac{(z_{l+1} \dots z_{l+p})_B}{B^l(B^p - 1)}$$

Nach Definition:

$$\begin{aligned} (z_{l+1} \dots z_{l+p})_B &\stackrel{(\clubsuit\clubsuit)}{=} \sum_{i=1}^p z_{l+i} B^{p-i} \stackrel{\text{Voraus.}}{=} \sum_{i=1}^p (B-1) B^{p-i} \\ &= (B-1) B^p \cdot \sum_{i=1}^p B^{-i} = (B-1) B^p \cdot \sum_{i=1}^p \left(\frac{1}{B}\right)^i \stackrel{\substack{\text{geom.} \\ \text{Reihe}}}{=} (B-1) B^p \cdot \frac{\frac{1}{B} - \left(\frac{1}{B}\right)^{p+1}}{1 - \frac{1}{B}} \\ &= (B-1) B^p \frac{1 - \left(\frac{1}{B}\right)^p}{B-1} \stackrel{\text{kürzen}}{=} B^p \left(1 - \frac{1}{B^p}\right) \\ &= B^p - 1 \end{aligned}$$

In die Formel für x eingesetzt:

$$x = \frac{(z_1 \dots z_l)_B}{B^l} + \frac{B^p - 1}{B^l(B^p - 1)} = \frac{(z_1 \dots z_l)_B}{B^l} + \frac{1}{B^l} = \frac{(z_1 \dots z_l)_B + 1}{B^l}$$

Ist nun l so gewählt, daß $z_l < B-1$ (sonst verlängere die Periode p), so ist

$$(z_1 \dots z_l)_B = \sum_{i=1}^l z_i B^{l-i} = \sum_{i=1}^{l-1} z_i B^{l-i} + z_l B^0 \implies$$

$$\begin{aligned}
&\implies (z_1 \dots z_l)_B + 1 = \sum_{i=1}^{l-1} z_i B^{l-i} + \underbrace{(z_l + 1)}_{\in \{0, \dots, B-1\}} B^0 = (z_1, \dots, z_{l-1}, z_l + 1)_B \implies \\
&\implies x = \frac{(z_1, \dots, z_{l-1}, z_l + 1)_B}{B^l} \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$