

Lösungsvorschläge zu Analysis I für Informatiker

Blatt 5

21. (4 Punkte)

a) Seien $q, r \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$ und die Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rekursiv definiert durch

i) $a_0 \in \mathbb{R}$

ii) $a_{n+1} = qa_n + r \quad (n \in \mathbb{N}_0)$.

Dann gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = q^n a_0 + \frac{q^n - 1}{q - 1} r$$

Beweis: Mit Induktion nach n :

$$\text{Induktionsanfang: } n = 0 \quad q^0 a_0 + \frac{q^0 - 1}{q - 1} r = 1 \cdot a_0 + \frac{1 - 1}{q - 1} r = a_0$$

Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$: Sei $a_n = q^n a_0 + \frac{q^n - 1}{q - 1} r$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ wahr.

Zu zeigen ist, daß dann $a_{n+1} = q^{n+1} a_0 + \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} r$.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } a_{n+1} &\stackrel{\text{ii)}}{=} qa_n + r \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} q \cdot \left(q^n a_0 + \frac{q^n - 1}{q - 1} r \right) + r \\ &\stackrel{\substack{\text{distr.} \\ \text{erweitern}}}{=} q \cdot q^n a_0 + \frac{q \cdot (q^n - 1)}{q - 1} r + \frac{q - 1}{q - 1} r \\ &= q^{n+1} a_0 + \frac{q^{n+1} - q + q - 1}{q - 1} r \\ &= q^{n+1} a_0 + \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} r \end{aligned}$$

b) Seien $(q_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(r_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ Folgen reeller Zahlen und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rekursiv definiert durch:

i) $a_0 \in \mathbb{R}$ und

ii) $a_{n+1} = q_n a_n + r_n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$.

Dann gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} q_i \right) a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} q_i \right) r_k$$

Beweis: Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$

$$\text{Induktionsanfang } n = 0 : \underbrace{\left(\prod_{i=0}^{0-1} q_i \right)}_{=1} a_0 + \underbrace{\sum_{k=0}^{0-1} \left(\prod_{i=k+1}^{0-1} q_i \right) r_k}_{=0} \cdot a_0 + 0 = a_0$$

Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$:

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte: $a_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} q_i \right) a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} q_i \right) r_k$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &\stackrel{ii)}{=} q_n a_n + r_n \\
 &\stackrel{IV}{=} q_n \cdot \left[\left(\prod_{i=0}^{n-1} q_i \right) a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} q_i \right) r_k \right] + r_n \\
 &\stackrel{\text{distr.}}{=} q_n \cdot \left(\prod_{i=0}^{n-1} q_i \right) a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} q_n \cdot \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} q_i \right) r_k + r_n \\
 &\stackrel{\text{Def.}}{=} \left(\prod_{i=0}^n q_i \right) a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^n q_i \right) r_k + \underbrace{\sum_{k=n}^n \left(\prod_{i=k+1}^n q_i \right) \cdot r_k}_{\substack{= \prod_{i=n+1}^n q_i = 1 \\ = r_n}} \\
 &= \left(\prod_{i=0}^n q_i \right) a_0 + \sum_{k=0}^n \left(\prod_{i=k+1}^n q_i \right) r_k
 \end{aligned}$$

denn für das rückläufige Produkt (d.h. $b < a$) gilt $\prod_{i=a}^b q_i = 1$ und analog für die

rückläufige Summe $\sum_{i=a}^b q_i = 0$.

- (c) Nun ist (a) direkt aus (b) zu folgern, d.h. es ist die rekursive Folge in (a) als Spezialfall von (b) nachzuweisen und zu zeigen, daß das Ergebnis in (a) aus dem Ergebnis in (b) hervorgeht.

Zunächst bekommt man die Folge in (a) durch die Setzung:

$q_n := q$ (d.h. die Folge $(q_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine konstante Folge)

$r_n := r$ (d.h. auch die Folge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist konstant).

Aus (a) erhält man: $a_n = q^n a_0 + \frac{q^n - 1}{q - 1} r$

und aus (b) folgt: $a_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} q_i \right) a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} q_i \right) r_k$

Zu zeigen ist nun, daß beide Formeln tatsächlich gleich sind. Das sieht man so:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \underbrace{\left(\prod_{i=0}^{n-1} q \right)}_{n \text{ Faktoren}} a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left(\prod_{i=k+1}^{n-1} q \right)}_{n-1-k \text{ Faktoren}} \cdot r \\
 &= q^n a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (q^{n-1-k} \cdot r)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= q^n a_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} q^{n-1-k} \right) \cdot r \\
&\stackrel{(*)}{=} q^n a_0 + \left(\sum_{n-1-k=0}^{n-1} q^{n-1-k} \right) \cdot r \\
&\stackrel{l:=n-1-k}{=} q^n a_0 + \left(\sum_{l=0}^{n-1} q^l \right) r \\
&\stackrel{\text{geom. Summe}}{=} q^n a_0 + \frac{q^n - 1}{q - 1} r
\end{aligned}$$

Dabei gilt $(*)$ aufgrund folgender Indexttransformation:

$0 \leq k \leq n-1 \iff 0 \geq -k \geq -(n-1) \iff n-1 \geq (n-1)-k \geq (n-1)-(n-1) = 0$
d.h. wenn k alle natürlichen Zahlen zwischen 0 und $n-1$ durchläuft, so durchläuft
 $n-1-k$ ebenfalls alle natürlichen Zahlen zwischen 0 und $n-1$, nur in der umgekehrten Reihenfolge (was wegen der Kommutativität denselben Wert ergibt).

22. (4 Punkte)

Sei p eine Primzahl. Dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : n^p - n \text{ ist durch } p \text{ teilbar} \quad (\text{d.h. es gibt } q \in \mathbb{N} \text{ mit } n^p - n = q \cdot p)$$

Dabei waren als Hinweise gegeben:

$(*)$ Binomischer Lehrsatz

$(**) \quad \forall 1 \leq k \leq p : p \text{ teilt } \binom{p}{k}, \text{ d.h. } p \cdot p_k = \binom{p}{k} \text{ für ein } p_k \in \mathbb{N}$

Beweis: mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang $n = 1$: $n^p - n = 1^p - 1 = 1 - 1 = 0 = 0 \cdot p$, also p teilt $0 = n^p - n$

Induktionsschritt $n \mapsto n+1$:

Induktionsvoraussetzung: Es gelte für ein $n \geq 1$: p teilt $n^p - n$, d.h. $p \cdot \nu_n = n^p - n$ für ein $\nu_n \in \mathbb{N}$.

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
(n+1)^p - (n+1) &\stackrel{\text{Binom. LS}}{=} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k 1^{p-k} - n - 1 \\
&= \underbrace{\binom{p}{0} \cdot n^0}_{=1} + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k + \underbrace{\binom{p}{p} n^p}_{=1} - n - 1 \\
&= (n^p - n) + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k \\
&\stackrel{\text{IV}}{=} p \cdot \nu_n + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(**)}{=} p \cdot \nu_n + \sum_{k=1}^{p-1} p \cdot p_k \cdot n^k \\
&\stackrel{\text{distr.}}{=} p \cdot \underbrace{\left(\nu_n + \sum_{k=1}^{p-1} p_k n^k \right)}_{\in \mathbb{N}}
\end{aligned}$$

Beweis des Hinweises (**):

Behauptung:

$$p \text{ Primzahl} \implies \forall 1 \leq k \leq p-1 : p \text{ teilt } \binom{p}{k}$$

Zunächst ist eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ definiert durch: $p > 1$, und die einzigen natürlichen Teiler von p sind 1 und p selbst.

Beweis mit Hilfe der Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung für jede natürliche Zahl:

$\forall 1 \leq k \leq p-1 : \binom{p}{k} = \frac{p!}{k! \cdot (p-k)!} \implies p! = \binom{p}{k} k! \cdot (p-k)!$, also taucht p als Faktor in der linken Seite $p!$ auf, d.h. p teilt $p!$, ist also Primfaktor auch der rechten Seite $\binom{p}{k} k! \cdot (p-k)!$, wobei nach Vorlesung $\binom{p}{k} \in \mathbb{N}$ ist.

Da aber p weder in $k!$ noch in $(p-k)!$ als Primfaktor auftreten kann (es ist ja für alle $1 \leq j \leq k$ wegen $k < p$ auch $j < p$, d.h. p teilt keines dieser j und ist damit auch kein Element der Primfaktorzerlegung des Produkts $1 \cdot 2 \cdots k = k!$; wegen $p-k < p$ (da $k \geq 1$) ist p aber auch kein Teiler von $(p-k)!$ mit derselben Argumentation), muß der Primfaktor p vom Faktor $\binom{p}{k}$ des rechten Produktes beigesteuert werden, weshalb also folgt: p teilt $\binom{p}{k}$.

Dieser Beweis benutzt aber Aussagen über die Primfaktorzerlegung, die in der Vorlesung nicht bereitgestellt wurden. Deshalb für interessierte Hörer ein weiterer Beweis, für den wir erst einige zahlentheoretische Aussagen herleiten:

- (1) (Division mit Rest) Zu je zwei natürlichen Zahlen a, b gibt es natürliche Zahlen q und r mit der Eigenschaft:

$$b = qa + r \quad \text{und} \quad 0 \leq r < a$$

- (2) Ist p Primzahl und p kein Teiler von $a \in \mathbb{N}$, so gibt es ganze Zahlen α, β , so daß $1 = \alpha \cdot a + \beta \cdot p$.

- (3) Ist p Primzahl und gilt: p teilt ab für $a, b \in \mathbb{N}$, so folgt: p teilt a oder p teilt b .

Wir beweisen:

Zu (1):

Wir definieren die Menge $M := \{b - n \cdot a \mid (n \in \mathbb{N}_0) \wedge (b - n \cdot a \geq 0)\} \ni b = b - 0 \cdot a$, d.h. $M \neq \emptyset$ und $M \subset \mathbb{N}_0$, also besitzt M ein Minimum $r \in M$ mit $r \in \mathbb{N}_0$. Ist nun $r = b - qa$ für ein $q \in \mathbb{N}_0$ (denn r liegt ja in M), so ist $b - (q+1)a < b - qa = r$, und weil r das kleinste Element in M ist, kann $b - (q+1)a$ nicht mehr in M liegen, es muß also $b - (q+1)a < 0$ gelten, d.h. $r = b - qa < a$. Damit ist schon alles gezeigt:

$$b = qa + (b - qa) = qa + r \quad \text{mit} \quad 0 \leq r < a.$$

Zu (2);

Sei nun p Primzahl und $a \in \mathbb{N}$ mit p kein Teiler von a . Wir definieren wieder eine Menge $M = \{xp + ya \in \mathbb{N} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$, und es ist natürlich wegen $p = 1 \cdot p + 0 \cdot a \quad p \in M$. Damit besitzt M wieder ein Minimum $j \in M$ mit $j \in \mathbb{N}$. Sei $j = xp + ya$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$ gemäß der Definition von M . Dann ist $j \geq 1$ und die Aussage (1) liefert, daß es $q, r \in \mathbb{N}$ gibt mit $0 \leq r < j$ und $p = qj + r$. Dann folgt aber:

$p = qj + r \stackrel{\text{Def. von } j}{=} q(xp + ya) + r = xqp + yqa + r \implies \mathbb{N}_0 \ni r = p - yqa - xqp = (-yq)a + (1 - xq)p$. Falls nun sogar $r \in \mathbb{N} \stackrel{\text{Def. von } M}{\implies} r \in M$, und das ist ein Widerspruch, da ja $r < j = \min(M)$, und wegen $r \in M$ folgen würde $r < r$. Also ist $r < 1 \wedge r \geq 0 \implies r = 0 \implies p = qj \stackrel{p \text{ prim}}{\implies} j = 1 \vee j = p$; da aber nach (1) auch $a = q_1p + s$ mit $q_1, s \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq s < p$ existieren, und $s \neq 0$, da p kein Teiler von a , folgt $\mathbb{N} \ni s = a - q_1p \implies s \in M$, also gibt es in M ein Element kleiner als p , so daß p nicht Minimum der Menge M sein kann $\implies j \neq p \implies j = 1$. Also ist $1 = xp + ya$ eine Darstellung wie behauptet.

Zu (3):

Das folgt nun unmittelbar aus obiger Behauptung: Es teile nämlich p das Produkt $a \cdot b$, und es gelte p teilt nicht a , dann ist zu zeigen: p teilt b . Da aber p a nicht teilt, liefert (2), daß es $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ gibt mit $1 = \alpha \cdot a + \beta \cdot p \implies 1 \cdot b = (\alpha \cdot a + \beta \cdot p) \cdot b = \alpha \cdot ab + \beta \cdot pb$. Da aber p ein Teiler von ab ist, d.h. es ein $q \in \mathbb{N}$ gibt mit $ab = pq$, folgt $b = \alpha qp + \beta pb \implies b = p \cdot (\alpha q + \beta b)$, d.h. p teilt b wie behauptet.

Damit folgt aber die Behauptung über die Binomialkoeffizienten:

$\forall 1 \leq k \leq p-1 : \binom{p}{k} = \frac{p!}{k! \cdot (p-k)!} \implies p! = \binom{p}{k} \cdot k! \cdot (p-k)! \implies p$ teilt einen der Faktoren des rechten Produkts. Da aber für alle $1 \leq j \leq k$ gilt, daß $j \leq k < p$, kann p kein Teiler dieser j sein und ebenso wenig ein Teiler der i mit $1 \leq i \leq p-k < p$, weshalb mit (3) folgt: p teilt $\binom{p}{k}$ q.e.d.

23. (4 Punkte)

Für zwei lipschitzstetige Funktionen $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall I und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt, daß auch folgende Funktionen lipschitzstetig sind:

a) $\lambda f(x) \quad (x \in I)$

denn: Zunächst die Definition:

f lipschitzstetig $\iff \exists L > 0 \forall x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \quad (*)$

Dann gilt für alle $x, y \in I$:

$$\begin{aligned} |\lambda f(x) - \lambda f(y)| &= |\lambda(f(x) - f(y))| \\ &= |\lambda| \cdot |f(x) - f(y)| \\ &\stackrel{(*)}{\leq} |\lambda| \cdot L \cdot |x - y| \\ &\leq \underbrace{(|\lambda| + 1) \cdot L}_{:= L_1} \cdot |x - y| \end{aligned}$$

und für dieses L_1 gilt $L_1 > 0$.

b) Es gelte nun für die Funktion g :

$$\exists M > 0 \forall x, y \in I : |g(x) - g(y)| \leq M \cdot |x - y| \quad (**)$$

Dann folgt für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |[f(x) - g(x)] - [f(y) - g(y)]| &= |[f(x) - f(y)] - [g(x) - g(y)]| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &\stackrel{(*)}{\leq} L \cdot |x - y| + M \cdot |x - y| \\ &\stackrel{(**)}{=} \underbrace{(L + M)}_{:=L_1} \cdot |x - y| \end{aligned}$$

Dabei ist $L_1 = L + M > 0$ wie gefordert.

c) $f(x) \cdot g(x)$ mit $x \in J$, wobei J ein beschränktes Teilintervall von I .

J beschränkt bedeutet, daß es ein $\mathbb{R} \ni c > 0$ gibt, so daß $J \subset [-c, c]$, d.h. $|x| \leq c$ für alle $x \in J$ (***).

Damit sind aber sogar die Funktionswerte von f und g beschränkt, denn es gilt:

Sei $x_0 \in J$ fest (aber beliebig) gewählt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |f(x)| - |f(x_0)| &\leq ||f(x)| - |f(x_0)|| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |f(x) - f(x_0)| \\ &\stackrel{(*)}{\leq} L \cdot |x - x_0| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} L \cdot (|x| + |x_0|) \\ &\stackrel{(***)}{\leq} L \cdot (c + c) \\ &= 2c \cdot L \end{aligned}$$

Also:

$$\forall x \in J : |f(x)| \leq |f(x_0)| + 2cL \quad (\clubsuit) \quad \text{und analog}$$

$$\forall x \in J : |g(x)| \leq |g(x_0)| + 2cM \quad (\clubsuit\clubsuit)$$

Damit folgt die Behauptung:

Seien $x, y \in J \implies$

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &= |f(x)(g(x) - g(y)) + g(y)(f(x) - f(y))| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |f(x)(g(x) - g(y))| + |g(y)(f(x) - f(y))| \\ &= |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| |f(x) - f(y)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(*)}{\underset{(**)}{\leq}} |f(x)| \cdot M \cdot |x - y| + |g(y)| \cdot L \cdot |x - y| \\
& \stackrel{\clubsuit}{\underset{\clubsuit}{\leq}} (|f(x_0)| + 2cL) \cdot M \cdot |x - y| + (|g(x_0)| + 2cM) \cdot L \cdot |x - y| \\
& = [|f(x_0)| \cdot M + 2cLM + |g(x_0)| \cdot L + 2cML] \cdot |x - y| \\
& = \underbrace{[|f(x_0)| \cdot M + |g(x_0)| \cdot L + 4cLM]}_{:=L_1} \cdot |x - y|
\end{aligned}$$

und wieder ist $L_1 > 0$ erfüllt q.e.d.

d) $g \circ f$, falls $f(I) \subset I$

Denn es gilt für alle $x, y \in I$:

$$\begin{aligned}
|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(y)| &= |g(f(x)) - g(f(y))| \\
&\stackrel{(**)}{\leq} M \cdot |f(x) - f(y)| \\
&\stackrel{(*)}{\leq} \underbrace{M \cdot L}_{:=L_1} \cdot |x - y|
\end{aligned}$$

und es ist wie gefordert $L_1 > 0$.

24. Zu beweisen ist die Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel, d.h.

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n) \quad (a_1 \geq 0, \dots, a_n \geq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2) \quad (*)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

a) Zu beweisen ist der Fall $n = 2$, d.h. für alle $a \geq 0, b \geq 0$: $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$

Seien also $\mathbb{R} \ni a, b \geq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b) &\iff 2\sqrt{ab} \leq (a + b) \\
&\iff 0 \leq a - 2 \cdot \sqrt{ab} + b \\
&\stackrel{a \geq 0}{\stackrel{b \geq 0}{\iff}} \sqrt{a}^2 - 2 \cdot \sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 \\
&\stackrel{\text{Binom. LS}}{=} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2
\end{aligned}$$

und die letzte Ungleichung ist immer wahr, somit auch die erste (Äquivalenzumformungen).

Ferner gelten die obigen Äquivalenzen auch mit dem Gleichheitszeichen, d.h. es ist

$$\sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a + b) \iff 0 = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \iff \sqrt{a} = \sqrt{b} \stackrel{a, b \geq 0}{\iff} a = b$$

d.h. die Gleichheitsaussage stimmt ebenfalls.

b) Behauptung: Gilt die Aussage (*) für ein $n \in \mathbb{N}$, so gilt sie auch für $2n$.

Beweis:

Seien $a_1, a_2, \dots, a_{2n} \geq 0$. Zu zeigen ist: $\sqrt[2n]{a_1 \cdots a_{2n}} \leq \frac{1}{2n}(a_1 + \dots + a_{2n})$

Nun gilt aber die Aussage für je n nicht-negative reelle Zahlen, also:

$$\left. \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \geq 0 \implies \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n) \\ a_{n+1}, \dots, a_{2n} \geq 0 \implies \sqrt[n]{a_{n+1} \cdots a_{2n}} \leq \frac{1}{n}(a_{n+1} + \dots + a_{2n}) \end{array} \right\} \quad (**)$$

Man setze nun $\alpha := \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n) \geq 0$ und $\beta := \frac{1}{n}(a_{n+1} + \dots + a_{2n}) \geq 0$ und wende die Aussage a) auf α und β an:

$$\begin{aligned} \sqrt[2n]{(a_1 \cdots a_n \cdot a_{n+1} \cdots a_{2n})} &= \sqrt{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n \cdot a_{n+1} \cdots a_{2n}}} \\ &= \sqrt{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \cdot \sqrt[n]{a_{n+1} \cdots a_{2n}}} \\ &\leq \sqrt{\alpha \cdot \beta} \\ &\stackrel{(**)}{\leq} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \\ &\stackrel{(a)}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n) + \frac{1}{n}(a_{n+1} + \dots + a_{2n}) \right) \\ &= \frac{1}{2n}(a_1 + \dots + a_{2n}) \end{aligned}$$

Zur Gleichheitsaussage:

Wenn Gleichheit gilt, d.h. nach oben

$$\sqrt[2n]{(a_1 \cdots a_n) \cdot (a_{n+1} \cdots a_{2n})} = \sqrt{\alpha \cdot \beta} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2n}(a_1 + \dots + a_{2n}) \quad (\clubsuit),$$

so folgt aus Aufgabenteil a) insbesondere, daß $\alpha = \beta$.

Falls es ein $1 \leq i \leq 2n$ gibt mit $a_i = 0$, so $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = 0$ oder $\sqrt[n]{a_{n+1} \cdots a_{2n}} = 0$, also wegen (\clubsuit) $\alpha = 0$ oder $\beta = 0 \implies \alpha = \beta = 0$ und damit wegen der Gültigkeit der Aussage für n : $a_1 = a_2 = \dots = a_{2n} = 0$.

Falls alle $a_i \neq 0$, $1 \leq i \leq 2n$, gilt:

$0 < \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \alpha$ und $0 < \sqrt[n]{a_{n+1} \cdots a_{2n}} \leq \beta \implies 0 < \sqrt[2n]{a_1 \cdots a_{2n}} \leq \alpha\beta$. Wenn nun $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} < \alpha$, so würde folgen: $0 < \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \cdot \sqrt[n]{a_{n+1} \cdots a_{2n}} < \alpha\beta$, im Widerspruch zu (\clubsuit) . Also ist $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = \alpha$ und $\sqrt[n]{a_{n+1} \cdots a_{2n}} = \beta$, und damit wegen der Gültigkeit für n : $a_1 = \dots = a_n \wedge a_{n+1} = \dots = a_{2n} \implies a_1^n = \alpha^n =$

$$\beta^n = a_{n+1}^n \xrightarrow{a_i \geq 0} a_1 = a_{n+1} \implies$$

$$a_1 = \dots = a_{2n} \quad \text{q.e.d.}$$

c) Behauptung: Gilt die Aussage (*) für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$, so gilt sie auch für $n-1$.

Beweis:

Seien nun $a_1, \dots, a_{n-1} \geq 0$ mit $n \geq 3$, und man definiere $a_n := \frac{1}{n-1}(a_1 + \dots + a_{n-1})$.

Dann sind $a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \geq 0$ und die Gültigkeit der Behauptung für n liefert:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} &\leq \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) \\
&= \frac{1}{n} \left(\underbrace{(a_1 + \cdots + a_{n-1})}_{=(n-1)a_n} + a_n \right) \\
&= \frac{1}{n} ((n-1)a_n + a_n) = a_n
\end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{pot.}}{\implies} a_1 \cdot \dots \cdot a_n \leq a_n^n \quad (***)$$

Falls nun $a_n = 0$, d.h. $0 \leq \frac{1}{n-1}(a_1 + \dots + a_{n-1}) = 0$, so folgt, weil alle $a_i \geq 0$ sind, daß $a_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$, d.h. $\sqrt[n-1]{0 \cdots 0} = 0 \leq 0 = \frac{1}{n-1}(0 + \dots + 0)$.

Falls $a_n \neq 0$ kann man in (***) durch a_n kürzen, d.h.

$$\begin{aligned}
a_1 \cdot \dots \cdot a_n \leq a_n^n &\implies a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \leq a_n^{n-1} \implies \\
\sqrt[n-1]{a_1 \cdots a_{n-1}} &\leq a_n = \frac{1}{n-1}(a_1 + \dots + a_{n-1})
\end{aligned}$$

Zur Gleichheitsaussage:

Ist $\sqrt[n-1]{a_1 \cdots a_{n-1}} = \frac{1}{n-1}(a_1 + \dots + a_{n-1}) = a_n$, so auch $a_1 \cdots a_{n-1} \cdot a_n = a_n^n$, d.h.

$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n) \implies a_1 = \dots = a_{n-1} = a_n$, da die Aussage (*) ja für n gilt, d.h. insbesondere $a_1 = \dots = a_{n-1}$ q.e.d.

25. a)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad (k, n \in \mathbb{N}_0, \quad 1 \leq k \leq n)$$

Beweis:

Der Beweis war mit der Methode des Koeffizientenvergleichs (siehe Vorlesung Satz (1.7)) für Polynomfunktionen zu führen. Als Hinweis war $(1+x) \cdot (1+x)^n = (1+x)^{n+1}$ gegeben.

Der Binomische Lehrsatz angewandt auf den Hinweis liefert:

$$\begin{aligned}
(1+x) \cdot (1+x)^n &= (1+x) \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \cdot 1^{n-k} \\
&\stackrel{\text{distr.}}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k + x \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k + \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k}_{\substack{\text{Indextransformation} \\ 0 \leq k \leq n \Leftrightarrow 1 \leq k-1 \leq n+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{n}{0}x^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}x^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1}x^k + \binom{n}{n}x^{n+1} \\
&= x^0 + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^k + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1}
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k \\
&= \binom{n+1}{0}x^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^k + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1}
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt also:

$$\forall 1 \leq k \leq n : \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad \text{q.e.d.}$$

b)

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Mit dem Hinweis: $(1+x)^n \cdot (1+x)^n = (1+x)^{2n}$ und dem Binomischen Lehrsatz folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k &\stackrel{\text{BLS}}{=} (1+x)^{2n} \\
&= (1+x)^n \cdot (1+x)^n \\
&\stackrel{\text{BLS}}{=} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j \right) \\
&\stackrel{\text{distr.}}{=} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{j} x^k x^j \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{j} x^{k+j} \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum_{l=0}^{2n} \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq j \leq n \\ k+j=l}} \binom{n}{k} \binom{n}{j} x^l
\end{aligned}$$

Dabei werden in $(*)$ alle Exponenten von x mit gleichem Wert l gesammelt, d.h. alle $0 \leq k \leq n$ und $0 \leq j \leq n$ mit $l = k + j$ zusammengefaßt.

Wegen $0 = 0 + 0 \leq k + j \leq n + n = 2n$ durchläuft dann l alle natürlichen Zahlen

zwischen 0 und $2n$.

Wir vergleichen nun die Koeffizienten des Terms x^n in beiden Darstellungen:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq j \leq n \\ k+j=n}} \binom{n}{k} \binom{n}{j}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert dann

$$\forall 0 \leq l \leq 2n : \binom{2n}{l} = \sum_{j=0}^l \binom{n}{j} \binom{n}{l-j}$$

Wegen $0 \leq k \leq n \wedge k+j=n \implies 0 \leq j=n-k \leq n$ ist j durch k eindeutig bestimmt und es folgt:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} \stackrel{\binom{n}{j}=\binom{n}{n-j}}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

c)

$$\sum_{l=0}^p \binom{m}{p-k} \binom{n}{k} = \binom{m+n}{p} \quad (m, n, p \in \mathbb{N}_0 \ p \leq m, \ p \leq n)$$

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{m+n} \binom{m+n}{p} x^p &\stackrel{\text{BLS}}{=} (1+x)^{m+n} = (1+x)^m \cdot (1+x)^n \\ &= \left(\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x^j \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n \binom{m}{j} \binom{n}{k} x^j x^k \\ &= \sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq n}} \binom{m}{j} \binom{n}{k} x^{k+j} \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{p=0}^{m+n} \left(\sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq n \\ j+k=p}} \binom{m}{j} \binom{n}{k} \right) x^p \end{aligned}$$

Dabei wurde in $(*)$ wieder wie in Teil (b) nach gleichen Exponenten von x zusammengefaßt.

Ist nun $p \leq m$ und $p \leq n$, so folgt mit Koeffizientenvergleich:

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq n \\ j+k=p}} \binom{m}{j} \binom{n}{k}$$

Wegen $0 \leq k \leq n$ und $0 \leq j \leq m$ folgt für die Indizes der Summenbedingung:

$$k + j = p \implies k = p - j \leq p - 0 = p \quad \text{und}$$

$$k + j = p \implies j = p - k \leq p - 0 = p, \quad \text{also}$$

$0 \leq k \leq p$ und $0 \leq j \leq p$ und $k + j = p$, d.h. j ist durch k als $j = p - k$ eindeutig bestimmt und die Summe lautet:

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq n \\ j+k=p}} \binom{m}{j} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k}$$

q.e.d.