

Analysis für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 46 (4 Punkte)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen mit $a_n \geq 0$ und $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

(Hinweis: Fallunterscheidung $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.)

Aufgabe 47 (4 Punkte)

Untersuchen Sie für $n \in \mathbb{N}$ das Konvergenzverhalten der Reihen:

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt[k]{k}}, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}}, \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{n^k}.$$

Aufgabe 48 (4 Punkte)

Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen, d.h. $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$ ($k \in \mathbb{N}_0$).

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

(b) Zeigen Sie: $\frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ($|x| < R$).

Bemerkung: $\frac{1}{1-x-x^2}$ ($|x| < R$) heißt erzeugende Funktion der Fibonacci-Folge.

Aufgabe 49 (4 Punkte)

Betrachten Sie die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k := \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

(a) Zeigen Sie, dass der Grenzwert dieser Reihe kleiner als $\frac{5}{6}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$\begin{aligned} \sigma(3m+1) &= 4m+1 \\ \sigma(3m+2) &= 4m+3 \\ \sigma(3m+3) &= 2m+2 \end{aligned} \quad (m \in \mathbb{N}_0)$$

eine bijektive Abbildung ist.

Bitte wenden!

(c) Betrachten Sie nun die umgeordnete Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} ,$$

d.h. die Reihe

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots .$$

Zeigen Sie, dass diese Reihe konvergiert und ihr Grenzwert größer als $\frac{5}{6}$ ist.

Aufgabe 50*

Betrachten Sie die Fibonacci-Folge und ihre erzeugende Funktion (Aufgabe 48).

- (a) Bestimmen Sie die Partialbruchentwicklung von $\frac{1}{1-x-x^2}$.
- (b) Leiten Sie mit der Methode des Koeffizientenvergleichs eine explizite Formel für die Fibonacci-Zahlen her (vgl. Aufgabe 29b), indem Sie die Partialbrüche als geometrische Reihen schreiben.

Abgabe einzeln oder zu zweit: Montag, 21.1.2008 bis 16¹⁵ Uhr,
Übungskasten vor der Bibliothek im 1. Stock

*Diese Zusatzaufgabe soll weitere Anwendungsmöglichkeiten des Vorlesungsstoffes aufzeigen. Sie wird aber nicht korrigiert und ist auch nicht prüfungsrelevant.