

**Lösungsvorschläge zu Analysis I für Informatiker**

**Blatt 13**

61. Sei  $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{(k + \frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})$

(a) **Behauptung:**  $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \quad (x \in D := \mathbb{R} \setminus \{(k + \frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})$

Beweis:

$$1 + \tan^2(x) = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \stackrel{(5.20)}{=} \frac{1}{\cos^2(x)}$$

(b) **Behauptung:** Die Funktion  $\tan$  ist in  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$  stetig, differenzierbar und streng monoton wachsend.

Beweis:

Vorlesung Satz (5.20)(a) :  $\sin, \cos$  sind differenzierbar mit  $\sin' = \cos$  und  $\cos' = -\sin$ . Dort, wo  $\cos(x) \neq 0$ , d.h. mit Vorlesung (5.22) Folgerung:

$x \notin N(\cos) := \{(k + \frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  ist mit Satz (5.22) der Vorlesung der Quotient  $\frac{\sin}{\cos}$

differenzierbar und es ist  $\tan'(x) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \sin'(x) - \cos'(x) \cdot \sin(x)}{\cos^2(x)} =$

$$\stackrel{\substack{\sin'=\cos \\ \cos'=-\sin}}{=} \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad (*)$$

Damit ist  $\tan$  in  $D$  differenzierbar  $\stackrel[\text{Folgerung}]{\text{VL (5.4)}} \tan$  stetig in  $D$ .

Nach Vorlesung (5.12)/Folgerung (a) gilt für eine auf einem Intervall  $I$  definierte und dort differenzierbare Funktion  $f$  :

$\forall x \in I : f'(x) > 0 \implies f$  streng monoton wachsend.

Hier ist  $I = ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$  und  $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0$ ;  $\tan$  erfüllt also die Voraussetzungen der Folgerung, also ist  $\tan$  auf  $D$  streng monoton wachsend.

(c) **Behauptung:**  $\tan\left(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \right) = \mathbb{R}$

Beweis:

Es gilt zunächst:

$$\lim_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \infty \quad \wedge \quad \lim_{x \downarrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty \quad (**)$$

Nach Definition ist  $\frac{\pi}{2}$  die kleinste positive Nullstelle des  $\cos$ , und mit

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{und}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{folgt:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^{2n} x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x) \\ \sin(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} = - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(x) \end{array} \right\} (\clubsuit)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Weiter ist  $\cos(0) = 1$  nach Vorlesung (5.21). Damit ist  $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}) : \cos(x) > 0$

(denn: gäbe es ein  $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$  mit  $\cos(x_0) < 0$ , so liefert der Zwischenwertsatz und die Stetigkeit von  $\cos$ , daß es mit  $\cos(x_0) < 0 < \cos(0)$  ein  $\xi$  zwischen  $x_0$  und 0 gibt, wo  $\cos(\xi) = 0$ , und da  $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$  liegt auch  $\xi$  im Intervall  $(0, \frac{\pi}{2})$ , d.h. insbesondere  $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$   $\nmid$  ( $\frac{\pi}{2}$  kleinste positive Nullstelle von  $\cos$ ).

Um  $\lim_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \infty$  zu zeigen sei  $K \in \mathbb{R}$  mit  $K > 0$  gegeben. Da  $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$  gilt wegen der Stetigkeit des  $\sin$  :

$$\begin{aligned} \exists 0 < \delta_1 < \frac{\pi}{2} \quad \forall \delta_1 < x < \frac{\pi}{2} : |\sin(x) - \sin(\frac{\pi}{2})| < \frac{1}{2} &\xRightarrow{\sin(\frac{\pi}{2})=1} \\ \implies 1 - \sin(x) \leq |\sin(x) - \sin(\frac{\pi}{2})| < \frac{1}{2} &\implies \sin(x) > \frac{1}{2} \xRightarrow{\cos(x)>0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} > \frac{1}{2 \cdot \cos(x)}. \end{aligned}$$

Ferner wegen der Steigkeit des  $\cos$  in  $\frac{\pi}{2}$  :

$$\begin{aligned} \exists 0 < \delta_2 < \frac{\pi}{2} \quad \forall \delta_2 < x < \frac{\pi}{2} : |\cos(x) - \cos(\frac{\pi}{2})| < \frac{1}{2K} &\xRightarrow[\cos(\frac{\pi}{2})=0]{\cos(x)>0} \\ \implies \cos(x) = |\cos(x)| < \frac{1}{2K} \end{aligned}$$

Also mit  $\delta := \max\{\delta_1, \delta_2\}$  :

$$\forall 0 < \delta < x < \frac{\pi}{2} : \frac{\sin(x)}{\cos(x)} > \frac{1}{2 \cos(x)} > \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2K}} = K \xRightarrow[\text{Def.}]{\substack{K>0 \\ \text{beliebig}}} \lim_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \infty$$

Da  $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$  folgt mit den Grenzwertsätzen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \downarrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) &= \lim_{x \downarrow -\frac{\pi}{2}} (-\tan(-x)) = \lim_{(***) \quad -x \uparrow \frac{\pi}{2}} (-\tan(-x)) \stackrel{\text{ersetze}}{=} \lim_{y:=-x \quad y \uparrow \frac{\pi}{2}} (-\tan(y)) = \\ &= -\lim_{y \uparrow \frac{\pi}{2}} \tan(y) = -\infty. \end{aligned}$$

Ad (\*\*\*) :

$$\begin{aligned} x \downarrow -\frac{\pi}{2} &\iff x > -\frac{\pi}{2} \quad \text{und } x \text{ fällt gegen } -\frac{\pi}{2} &\iff -x < \frac{\pi}{2} \quad \text{und } -x \text{ wächst} \\ \text{gegen } -\frac{\pi}{2} &\iff (-x) \uparrow \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Damit beweisen wir nun (c) :

„ $\subseteq$ “:

Natürlich gilt  $\tan\left(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \right) \subseteq \mathbb{R}$

„ $\supseteq$ “:  $\tan(0) = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0$ .

Weil  $\lim_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \infty$  gilt:

$\forall y > 0 \exists 0 < \delta < \frac{\pi}{2} \forall 0 < \delta < x < \frac{\pi}{2} : \tan(x) > y > \tan(0) = 0$ ; sei nun

$\delta < x_0 < \frac{\pi}{2}$  fest gewählt  $\xRightarrow[\text{Wertsatz}]{\text{Zwischen-}}$   $\exists \xi \in ]0, x_0[ \subseteq ]0, \frac{\pi}{2}[ : \tan(\xi) = y$ .

$\forall y < 0 \exists -\frac{\pi}{2} < \delta < 0 \forall -\frac{\pi}{2} < x < \delta : \tan(x) < y < \tan(0) = 0$ ; sei dazu wieder

$-\frac{\pi}{2} < x_1 < \delta$  fest gewählt  $\xRightarrow[\text{Wertsatz}]{\text{Zwischen-}}$   $\exists \xi \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[ \subseteq ]-\frac{\pi}{2}, 0[ : \tan(\xi) = y$

In jedem Fall also  $y = \tan(\xi)$  für ein  $\xi \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  ( $y \in \mathbb{R}$  beliebig)

$\Rightarrow \mathbb{R} \subseteq \tan\left(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \right)$  q.e.d.

- (d) **Behauptung:**  $\tan\left|]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \right|$  besitzt eine stetige und streng monoton wachsende Umkehrfunktion  $\arctan$  mit Definitionsbereich  $\mathbb{R}$ .

Beweis:

Nach Teil (b) und (c) ist  $\tan\left|]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}\right|$  injektiv (da streng monoton wachsend) und surjektiv; also existiert die Umkehrfunktion  $\arctan$ .

Sei nun  $a > 0$  beliebig; nach Teil (c) gibt es ein  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  mit  $\tan(\beta) = a$ . Für das Intervall  $I := [-\beta, \beta] \subseteq ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  gilt:  $\tan$  ist auf  $I$  streng monoton wachsend, stetig und bildet das Intervall  $I$  auf das Intervall  $J := [-\tan(\beta), \tan(\beta)] = [-a, a]$  bijektiv ab. Nach Satz (4.7) der Vorlesung (von der Umkehrung streng monotoner stetiger Funktionen) ist dann die Umkehrfunktion  $(\tan|_I)^{-1} = \arctan|_J : J = [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton wachsend und stetig, d.h. für die eindeutig bestimmte Umkehrfunktion  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  von  $\tan$  gilt:

$\forall a > 0 : \arctan|_{[-a, a]}$  ist streng monoton wachsend und stetig  $\Rightarrow \arctan$  ist auf ganz  $\mathbb{R}$  streng monoton wachsend und stetig.

(Für je zwei Punkte  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x < y$  gibt es nämlich ein  $a \in \mathbb{R}$ , zum Beispiel  $a = |x| + |y| + 1$ , so daß  $x, y \in ]-a, a[ \subseteq [-a, a]$  und  $\arctan|_{[-a, a]}$  streng monoton wachsend und stetig nach oben  $\Rightarrow \arctan(x) < \arctan(y)$  und  $\arctan$  stetig in  $x$  q.e.d.)

- (e) **Behauptung:**  $\arctan(0) = 0 \wedge \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

Beweis:

$$\bullet \tan(0) = 0 \xRightarrow{\text{Def.}} \arctan(0) = 0$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} 0 = \cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(2 \cdot \frac{\pi}{4}) \\ 1 = \cos^2(\frac{\pi}{4}) + \sin^2(\frac{\pi}{4}) \end{array} \right\} \xRightarrow[\text{addieren}]{\begin{array}{l} \text{Add.} \\ \text{theoreme} \\ \text{(Satz (5.20))} \end{array}} \cos^2(\frac{\pi}{4}) - \sin^2(\frac{\pi}{4}) \Bigg\} \Rightarrow 2 \cos^2(\frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \implies |\cos(\frac{\pi}{4})| &= \frac{1}{2} \sqrt{2} \xrightarrow{\cos \in ]0, \frac{\pi}{2}[ > 0} \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \sqrt{2} \text{ und } \sin^2(\frac{\pi}{4}) = 1 - \cos^2(\frac{\pi}{4}) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\sin \in ]0, \frac{\pi}{2}[ > 0} \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \sqrt{2} \implies \tan(\frac{\pi}{4}) = 1 \implies \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \\ &\text{q.e.d.} \end{aligned}$$

- Für  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$  ist zu zeigen:

$$\forall \epsilon > 0 \exists K > 0 \forall x > K : \left| \arctan(x) - \frac{\pi}{2} \right| < \epsilon \iff \frac{\pi}{2} - \arctan(x) < \epsilon \iff \\ \iff \arctan(x) > \frac{\pi}{2} - \epsilon \quad (\text{da } \arctan(\mathbb{R}) = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ ).$$

Wähle dazu  $\epsilon' := \min\{\epsilon, \frac{\pi}{4}\} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , und dann gilt für alle  $x > \tan(\frac{\pi}{2} - \epsilon')$  :  
 $\arctan(x) > \frac{\pi}{2} - \epsilon' > \frac{\pi}{2} - \epsilon$  (da  $\epsilon' < \epsilon \wedge \arctan$  streng monoton wachsend).

Definiere also  $K := \tan(\frac{\pi}{2} - \epsilon') > 0$  (da  $\frac{\pi}{2} > \epsilon'$ ).

(f) **Behauptung:**  $\arctan$  ist differenzierbar mit der Ableitung

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Beweis:

Wir verwenden Satz (5.7) der Vorlesung (Satz von der Ableitung der Umkehrfunktion):

Sei  $b \in \mathbb{R}$  beliebig,  $b = \tan(a)$  für ein  $a \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , d.h.  $|a| < \frac{\pi}{2} \implies$

$$0 \leq |a| < \frac{|a| + \frac{\pi}{2}}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Damit ist  $a \in ]-\frac{|a| + \frac{\pi}{2}}{2}, \frac{|a| + \frac{\pi}{2}}{2}[ \subseteq I := ]-\frac{|a| + \frac{\pi}{2}}{2}, \frac{|a| + \frac{\pi}{2}}{2}[$ , und

$$J := ]-\tan(\frac{|a| + \frac{\pi}{2}}{2}), \tan(\frac{|a| + \frac{\pi}{2}}{2})[ \supseteq ]-\tan(\frac{|a| + \frac{\pi}{2}}{2}), \tan(\frac{|a| + \frac{\pi}{2}}{2})[ \ni b.$$

$\tan|_I$  ist streng monoton wachsend und stetig nach Teil (b),  $\tan' = \frac{1}{\cos^2} > 0 \xrightarrow{\text{Satz (5.7)}}$

$\arctan$  ist in  $b$  differenzierbar und  $\arctan'(b) = \frac{1}{\tan'(a)}$ , wobei  $a = \arctan(b)$ .

$$\tan'(a) = \frac{1}{\cos^2(a)} \implies \arctan'(b) = \frac{1}{\tan'(a)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(a)}} \stackrel{\text{Teil (a)}}{=} \frac{1}{1 + \tan^2(a)} =$$

$$\frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(b))} \stackrel{\tan \circ \arctan = \text{id}}{=} \frac{1}{1 + b^2}$$

$$\text{Also: } \forall x \in \mathbb{R} : \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{q.e.d.}$$

(g) **Behauptung:**  $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$  ( $|x| < 1$ )

Beweis:

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1 : \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} \stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots =: p(x),$$

d.h.  $p(x)$  ist eine Potenzreihe in  $x$  mit Konvergenzradius 1.

Nun wenden wir Satz (5.17) der Vorlesung über die gliedweise Integration von Potenzreihen an:

Mit  $a_k = \begin{cases} (-1)^l & \text{falls } k = 2l \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$  folgt für  $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{(-1)^{(\frac{k}{2})}}{k+1} x^{k+1} \stackrel{\text{setze}}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} x^{2l+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \pm \dots$$

ist eine Stammfunktion von  $p = \arctan'$ . Nach Lemma (5.18)(b) der Vorlesung unterscheiden sich zwei Stammfunktionen auf einem Intervall nur um eine Konstante. Nun ist natürlich  $\arctan$  eine Stammfunktion von  $\arctan'$ , d.h. nach diesem Lemma unterscheiden sich  $\arctan$  und  $P$  auf dem Intervall  $I = \mathbb{R}$  nur um eine Konstante  $C$

$$\implies \forall x \in \mathbb{R} : P(x) - \arctan(x) = C$$

Nun ist nach Teil (e)  $\arctan(0) = 0$  und  $P(0) = 0$  (einsetzen!)  $\implies$

$$0 = P(0) - \arctan(0) = C \implies P = \arctan \implies$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \pm \dots \quad \text{q.e.d.}$$

(h) **Behauptung:**  $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$  Leibnizreihe

Beweis:

Rein formal ist  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1^{2k+1}}{2k+1} = \arctan(1) \stackrel{\text{Teil (e)}}{=} \frac{\pi}{4}$ .

Der Konvergenzradius der Potenzreihe  $P$  aus Teil (g) ist gerade  $R = 1$ , d.h. der Punkt  $R = 1$  liegt nicht mehr im Konvergenzintervall. Der Abelsche Grenzwertsatz Vorlesung (5.19) besagt jedoch, daß im Falle der Konvergenz der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} 1^{2k+1}$

gilt:

$$\lim_{x \uparrow 1} \underbrace{\left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \right)}_{= \arctan(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} 1^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Wegen der Stetigkeit des  $\arctan$  in  $\mathbb{R}$  und Teil (e) also :

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \lim_{x \uparrow 1} (\arctan(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad \text{q.e.d.}$$

## Die Zusatzaufgaben:

1. Mit vollständiger Induktion:

(a) **Behauptung:**  $3^n \geq n + 1$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

Beweis:

Induktionsanfang:  $n = 1$  :  $3^n = 3^1 = 3 > 2 = 1 + 1 = n + 1$

Induktionsschritt  $n \rightarrow n + 1$  :

Induktionsvoraussetzung:  $3^n \geq n + 1$  gelte für ein  $n \in \mathbb{N}$ .

Dann:

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \stackrel{\text{IV}}{\geq} 3 \cdot (n + 1) = 3n + 3 = n + 2 + \underbrace{(2n + 1)}_{> 0} > n + 2 \quad \text{q.e.d.}$$

(b) **Behauptung:**  $\sum_{k=2}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - 2$  ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ )

Beweis:

Induktionsanfang:  $n = 2$  :

$$\sum_{k=2}^2 k(k+1) = 2 \cdot 3 = 6 = 8 - 2 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3} - 2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - 2$$

Induktionsschritt  $n \rightarrow n + 1$  :

Induktionsvoraussetzung: Für ein  $n \in \mathbb{N}$  gelte:  $\sum_{k=2}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - 2$  .

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n+1} k(k+1) &= \sum_{k=2}^n k(k+1) + (n+1)(n+2) = \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - 2 + (n+1)(n+2) = \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{(n+1)(n+2)}{3} \cdot 3 - 2 = \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{3} [n+3] - 2 = \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{3} - 2 \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

## 2. Mit dem Binomischen Lehrsatz:

(a) **Behauptung:**  $3^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \quad (n \in \mathbb{N})$

Beweis:

$$3^n = (2+1)^n \stackrel{\text{BLS}}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \quad \text{q.e.d.}$$

(b) **Behauptung:**  $(1+x^2)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} x^4 \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$

Beweis:

Nach dem Binomischen Lehrsatz gilt für  $n \geq 2$  :

$$(1+x^2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{2k} = 1 + \binom{n}{1} x^2 + \binom{n}{2} x^4 + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} x^{2k}$$

$$1. \text{ Fall: } n < 2 \implies n = 1 : (1+x^2)^1 = 1 + x^2 \geq 1 = 1 + 0 = 1 + \frac{1(1-1)}{2} x^4$$

$$2. \text{ Fall: } n \geq 2 \implies (1+x^2)^n = 1 + \binom{n}{1} x^2 + \binom{n}{2} x^4 + \underbrace{\sum_{k=3}^n \binom{n}{k} x^{2k}}_{\geq 0} \geq 1 + n \cdot x^2 + \frac{n(n-1)}{2} x^4$$

nach Definition der Binomialkoeffizienten. q.e.d.

## 3. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lipschitzstetige Funktion.

(a) **Behauptung:**  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) := f(x) + x$  ist Lipschitzstetig.

Beweis:

$$f \text{ Lipschitzstetig} \stackrel{\text{Def.}}{\implies} \exists L > 0 \forall x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \quad (*)$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R} : |g(x) - g(y)| &= |(f(x) + x) - (f(y) + y)| = |(f(x) - f(y)) + (x - y)| \leq \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |f(x) - f(y)| + |x - y| \stackrel{(*)}{\leq} L \cdot |x - y| + |x - y| = \underbrace{(L+1)}_{=: L_1} \cdot |x - y|. \end{aligned}$$

Also ist  $g$  Lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstanten  $L_1 = L + 1$ . q.e.d.

(b) **Behauptung:** Die Funktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) := f(x) + x^2$  ist im allgemeinen nicht Lipschitzstetig.

Gegenbeispiel:

Man wähle  $f = 0$ ; die Funktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^2$  ist nicht Lipschitzstetig.

Zu zeigen:

$$\begin{aligned} \forall L > 0 \exists x, y \in \mathbb{R} : |h(x) - h(y)| > L \cdot |x - y| &\stackrel{\text{Def.}}{\iff} |x^2 - y^2| > L \cdot |x - y| \iff \\ |(x-y)(x+y)| > L \cdot |x - y| &\iff |x - y| |x + y| > L |x - y| \stackrel{\text{o.E.: } x \neq y}{\iff} |x + y| > L \end{aligned}$$

Zu beliebig vorgewähltem  $L > 0$  sind also z. B.  $x := 2L, y := L$  geeignet, da dann  $|x + y| = 3L > L$  q.e.d.

4. Für die angegebenen Folgen sind die Grenzwerte zu bestimmen.

(a) **Behauptung:**  $a_n := \sqrt[n]{4^n \cdot n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4$

Beweis:

Es ist  $a_n = \sqrt[n]{4^n \cdot n^2} = \sqrt[n]{4^n} \cdot \sqrt[n]{n^2} = 4 \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{Vorl.}} 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4$

Denn nach Vorlesung gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ; ferner sind die Grenzwertsätze aus der Vorlesung (2.5) zu verwenden. q.e.d.

(b) **Behauptung:**  $b_n := \frac{2^n + 3n^4}{\sqrt{2^n + 3^{2n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Beweis:

Es gilt  $2^n + 3^{2n} > 3^{2n} \implies \sqrt{2^n + 3^{2n}} > \sqrt{3^{2n}} = \sqrt{(3^n)^2} = 3^n \implies$

$$0 < b_n = \frac{2^n + 3n^4}{\sqrt{2^n + 3^{2n}}} < \frac{2^n + 3n^4}{\sqrt{3^{2n}}} = \frac{2^n + 3n^4}{3^n} = \frac{2^n}{3^n} + 3 \cdot \frac{n^4}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3 \cdot \frac{n^4}{3^n} \stackrel{(**)}{\leq} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3 \cdot \frac{2^n}{3^n}$$

Ad (\*\*): Es gilt  $n^4 \leq 2^n$  für alle  $n \geq 1920$

denn: Für alle  $n \geq 5$ :

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \geq \binom{n}{5} = \frac{n!}{5! \cdot (n-5)!} = \frac{1}{5!} \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \quad (\blacktriangleleft)$$

Nun gilt für  $1 \leq k \leq 4$ :  $n-k > \frac{n}{2} \iff \frac{n}{2} > k \iff n > 2k$

für  $k=4$  also  $n > 4 \cdot 2 = 8$ , d.h.  $n \geq 9$ . Also:

$$\begin{aligned} \forall n \geq 9 : n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) &\geq n \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^4 = \frac{n^5}{16} \implies \\ \implies 2^n &\stackrel{(\blacktriangleleft)}{\geq} \frac{1}{5!} \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \geq \frac{1}{120} \cdot \frac{n^5}{16} \end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\frac{1}{120} \cdot \frac{n^5}{16} \geq n^4 \iff n \geq 16 \cdot 120 = 1920 \implies$$

$$\forall n \geq 1920 : 2^n \geq \frac{1}{16 \cdot 120} n^5 \geq n^4$$

Es gilt also für alle  $n \geq 1920$ :  $0 < b_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3 \cdot \frac{2^n}{3^n} = 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ,

da wegen  $\frac{2}{3} < 1$  die Folge  $\left(\frac{2}{3}\right)^n$  gegen 0 konvergiert (Vorlesung (2.7)).

(c) **Behauptung:**  $c_n := \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^6$

Beweis:

$$c_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n} = \left[\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right]^3$$



Nun gilt nach Vorlesung :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x \implies \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^2 ,$$

und mit der Produktregel für konvergente Folgen erhält man:

$$\left[\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right]^3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (e^2)^3 = e^6 \quad \text{q.e.d.}$$

5. Die folgenden Reihen sind auf Konvergenz hin zu untersuchen:

(a) **Behauptung:** Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2k^2 - 1}}$  ist bestimmt divergent gegen  $\infty$ .

Beweis:

Es gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\frac{1}{\sqrt{2k^2 - 1}} \geq \frac{1}{2k} \iff \sqrt{2k^2 - 1} \leq 2k \iff 0 < 2k^2 - 1 \leq 4k^2 \iff -1 \leq 2k^2 ,$$

und das ist wahr. Also:

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k^2 - 1}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Nun konvergiert nach Vorlesung die harmonische Reihe  $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  gegen  $\infty$ , also:

$$s_n \geq \frac{1}{2} h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \implies \text{die Reihe } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2k^2 - 1}} \text{ divergiert bestimmt.} \quad \text{q.e.d.}$$

(b) **Behauptung:** Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^2 + 1}}$  ist konvergent

Beweis:

Da  $\frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} > 0$  handelt es sich wegen des Faktors  $(-1)^k$  um eine alternierende Reihe; damit kann man das Leibniz-Kriterium verwenden.

Test der Voraussetzungen:

$$(k+1)^2 + 1 > k^2 + 1 \implies \sqrt{(k+1)^2 + 1} > \sqrt{k^2 + 1} \implies \frac{1}{\sqrt{(k+1)^2 + 1}} < \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} ,$$

d.h. die Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $a_k := \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}$  ist monoton fallend

$$k^2 + 1 > k^2 \implies \sqrt{k^2 + 1} > k \implies \begin{array}{ccc} 0 & < \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} = a_k < & \frac{1}{k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \\ \downarrow \end{array}$$

Sandwich-Lemma  $\frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \implies$  die Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist Nullfolge.

Damit folgt mit dem Leibniz-Kriterium die Konvergenz der Reihe. q.e.d.

- (c) **Behauptung:** Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4^k}{k!}$  ist konvergent mit Grenzwert  $\frac{1}{e^4} - 1$ .

Beweis:

Nach Vorlesung gilt:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x ; \text{ hier also:}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4^k}{k!} - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 4^k}{k!} - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)^k}{k!} - 1 \stackrel{\text{s.o.}}{=} e^{-4} - 1 = \frac{1}{e^4} - 1$$

q.e.d.

6. Für die folgenden Potenzreihen sind die Konvergenzradien zu bestimmen:

- (a) **Behauptung:** Die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$  hat den Konvergenzradius  $R = \frac{1}{2}$ .

Beweis:

Mit dem Wurzelkriterium folgt mit  $a_k := 2^k$ :

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{2^k} = 2 \implies R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}} = \frac{1}{2} \quad \text{q.e.d.}$$

- (b) **Behauptung:** Die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{k}\right)^k k! x^k$  hat den Konvergenzradius  $R = \frac{e}{3}$ .

Beweis:

Es war als Hinweis  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{k!}}{k} = \frac{1}{e}$  angegeben (ohne Beweis). Damit ergibt sich mit dem Wurzelkriterium und mit  $a_k := \left(\frac{3}{k}\right)^k k!$ :

$$\sqrt[k]{\left(\frac{3}{k}\right)^k k!} = 3 \cdot \sqrt[k]{\frac{k!}{k}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{Hinweis}} \frac{3}{e} \implies R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}} = \frac{1}{3/e} = \frac{e}{3} \quad \text{q.e.d.}$$

- (c) **Behauptung:** Die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} 4^{(k^2)} x^k$  hat den Konvergenzradius  $R = 0$ .

Beweis:

Sei  $a_k := 4^{(k^2)}$ ; dann folgt wieder mit dem Wurzelkriterium:

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{4^{(k^2)}} = 4^{(\frac{k^2}{k})} = 4^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty \xRightarrow{\text{Vorl.}} R = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

7. Für die folgenden Funktionen sind die Ableitungen zu bestimmen:

- (a) **Behauptung:** Die Funktion  $f(x) := \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$  ( $x > 1$ ) ist differenzierbar mit der Ableitung  $f'(x) = \frac{4x}{x^4 - 1}$ .

Beweis:

Definiere  $g(x) := \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ; da der Nenner dieser Funktion immer grösser 0 ist, ist  $g$  als rationale Funktion differenzierbar mit der Ableitung

$$\begin{aligned} g'(x) &\stackrel{\text{Quotienten-}}{=} \text{regel} \frac{(x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1)' - (x^2 + 1)' \cdot (x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{(x^2 + 1)2x - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Weiter ist  $g(x) > 0 \iff x^2 - 1 > 0 \iff |x| > 1 \implies$  für  $x > 1$  ist die Komposition  $f = \ln \circ g$  wohldefiniert, und mit der Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned} \forall x > 1 : f'(x) &= (\ln' \circ g)(x) \cdot g'(x) = \ln'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{4x \cdot \cancel{(x^2 + 1)}}{(x^2 + 1)^2 \cdot (x^2 - 1)} = \\ &= \frac{4x}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} = \frac{4x}{x^4 - 1} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

- (b) **Behauptung:** Die Funktion  $g(x) := (\sqrt{2})^x \cdot x^{\sqrt{2}}$  ( $x > 0$ ) ist differenzierbar mit der Ableitung  $g'(x) = (\sqrt{2})^x \cdot x^{\sqrt{2}} \left[ \ln(\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{x} \right]$ .

Beweis:

Man definiere:

$u(x) := (\sqrt{2})^x = \exp(x \ln(\sqrt{2}))$ ; diese Funktion ist auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert mit der Ableitung  $u'(x) = \exp'(x \ln(\sqrt{2})) \cdot (x \ln(\sqrt{2}))' = (\sqrt{2})^x \cdot \ln(\sqrt{2})$ , und  $v(x) := x^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2} \ln(x))$ ; diese Funktion ist definiert für  $x > 0$  und hat die Ableitung  $v'(x) = \exp'(\sqrt{2} \ln(x)) \cdot (\sqrt{2} \ln'(x)) = x^{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{x}$ .

Dann ist auch die Produktfunktion  $g = u \cdot v$  für  $x > 0$  differenzierbar mit der Ableitung:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (u \cdot v)'(x) \stackrel{\text{Produkt-}}{=} \text{regel} u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = \\ &\stackrel{\text{s.o.}}{=} (\sqrt{2})^x \ln(\sqrt{2}) \cdot x^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2})^x \cdot x^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{x} = \\ &= (\sqrt{2})^x x^{\sqrt{2}} \left[ \ln(\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{x} \right] \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

- (c) **Behauptung:** Die Funktion  $h(x) := x^{\cos(x^2)} \quad (x > 0)$  ist differenzierbar mit der Ableitung  $h'(x) = x^{\cos(x^2)} \left[ \cos(x^2) \cdot \frac{1}{x} - 2x \sin(x^2) \ln(x) \right]$ .

Beweis:

$$\text{Setze } t(x) := \cos(x^2) \xrightarrow[\text{regel}]{\text{Ketten-}} t'(x) = -\sin(x^2) \cdot 2x = -2x \sin(x^2)$$

$$\text{Dann ist für alle } x > 0 : h(x) \stackrel{\text{Def.}}{=} \exp(t(x) \cdot \ln(x)) \implies h = \exp \circ (t \cdot \ln) \xrightarrow[\text{Produktregel}]{\text{Ketten- und}}$$

$$h' = (\exp' \circ (t \cdot \ln)) \cdot (t' \cdot \ln + t \cdot \ln') = (\exp \circ (t \ln)) \cdot \left( t \frac{1}{\text{id}} + t' \ln \right) \implies$$

$$\forall x > 0 : h'(x) = x^{\cos(x^2)} \left[ \cos(x^2) \cdot \frac{1}{x} - 2x \sin(x^2) \cdot \ln(x) \right] \quad \text{q.e.d.}$$

8. Sei die Funktion  $f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ .

- (a) **Behauptung:**  $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = -\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

Beweis:

Es ist nach Vorlesung:  $\lim_{x \downarrow 0} \ln(x) = -\infty$ , d.h.

$$\forall K < 0 \exists \delta' > 0 \forall 0 < x < \delta' : \ln(x) < K$$

Man setze  $\delta := \min\{\delta', 1\}$ ; dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $0 < x < \delta : 0 < x < 1$

$$\implies \frac{1}{x} > 1 \text{ und } 0 < x < \delta' \implies$$

$$\implies \forall 0 < x < \delta : \frac{\ln(x)}{x} < \frac{K}{x} \stackrel{K < 0}{<} K, \text{ d.h. nach Definition } \lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$$

Um  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$  zu beweisen argumentieren wir:

$$\forall x > 1 : e^{\sqrt{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^n}{n!} = 1 + \sqrt{x} + \frac{(\sqrt{x})^2}{2!} + \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^n}{n!}}_{\geq 0} \geq 1 + \sqrt{x} + \frac{x}{2} > \frac{x}{2} \implies$$

$$\stackrel{\substack{\ln \\ \text{wächst}}}{\implies} \ln(e^{\sqrt{x}}) = \sqrt{x} > \ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln(x) - \ln(2) \implies \sqrt{x} + \ln(2) > \ln(x) > 0 \implies$$

$$\stackrel{\substack{\cdot \frac{1}{x}}}{\implies} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln(2)}{x} > \frac{\ln(x)}{x}$$

$$\text{Nun gilt aber } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln(2)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2)}{x} = 0 + 0 = 0 \implies$$

$$0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln(2)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

$$\stackrel{\substack{\text{Sandwich-} \\ \text{Lemma}}}{\implies} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

(b) **Behauptung:** Die Funktion  $f$  hat an der Stelle  $x = e$  ihren maximalen Wert.

Beweis:

Die Funktion  $f = \frac{\ln}{id}$  ist für alle  $x > 0$  definiert und differenzierbar mit der Ableitung

$$f' \stackrel{\text{Quotientenregel}}{=} \frac{id \cdot \ln' - id' \cdot \ln}{id^2} \implies \forall x > 0 : f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - 1 \cdot \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \quad (\spadesuit)$$

Nach Vorlesung ist eine notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Extremums auf einem Intervall  $I$  (hier:  $I = (0, \infty)$ ), daß dort die Ableitung verschwindet; man setze also an:

$$f'(x) = 0 \iff 1 - \ln(x) = 0 \iff \ln(x) = 1 \iff x = e$$

Damit ist die einzige Stelle, an der ein Extremum vorliegen kann  $x = e$ . Es gilt:

$\forall 0 < x < e : \ln(x) < \ln(e) = 1 \stackrel{(\spadesuit)}{\implies} f'(x) > 0 \stackrel{\text{Vorl.}}{\implies} f|_{(0, e]}$  streng monoton wachsend, d.h.  $f(x) < f(e)$

$\forall e < x : 1 = \ln(e) < \ln(x) \stackrel{(\spadesuit)}{\implies} f'(x) < 0 \implies f|_{[e, \infty)}$  streng monoton fallend, d.h.  $f(x) < f(e)$

also:  $\forall 0 < x \neq e : f(x) < f(e) \implies$  Im Punkt  $x = e$  liegt ein (globales) Maximum vor mit Wert  $f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}$  q.e.d.

(c) **Behauptung:** Die Gleichung

$$\frac{\ln(x)}{x} = y \quad (\clubsuit)$$

besitzt für  $y \in (0, \frac{1}{e})$  genau zwei Lösungen, und für  $y \leq 0$  genau eine Lösung.

Beweis:

$$\forall 0 < x \neq e : f(x) < f(e) = \frac{1}{e}.$$

Ferner:

$$f(x) > 0 \iff \frac{\ln(x)}{x} > 0 \stackrel{x>0}{\implies} \ln(x) > 0 \iff x > 1$$

Also:

$$\left. \begin{array}{l} \forall 0 < x < 1 : f(x) < 0 \\ \forall 1 < x \neq e : 0 < f(x) < f(e) \end{array} \right\} \quad (\bullet)$$

(i) Sei nun zunächst  $y \in (0, \frac{1}{e}) \iff 0 < y < \frac{1}{e}$ ;

$$\forall x \leq 1 : f(x) \stackrel{(\bullet)}{\leq} 0 < y \implies f(x) \neq y$$

Da  $f|_{(0, e]}$  streng monoton wächst, ist auch  $f|_{[1, e]}$  streng monoton wachsend

und  $f(1) = 0 < y < \frac{1}{e} = f(e) \stackrel{f \text{ stetig}}{\underset{\text{ZWS}}{\implies}}$  es gibt ein  $\xi \in (1, e)$  mit  $f(\xi) = y$ , und da

$f|_{[1, e]}$  injektiv ist, gibt es für die Gleichung  $(\clubsuit)$  genau eine Lösung in  $(0, e]$ .  
 Nach Teil (b) ist  $f|_{[1, \infty)}$  streng monoton fallend; also kann es in diesem Intervall höchstens eine Lösung der Gleichung  $(\clubsuit)$  geben. Andererseits ist nach Teil (b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , d.h. mit  $y > 0$  gibt es ein  $K > 0$  so daß:

$$\forall x \geq K : 0 < f(x) < y \xRightarrow{e+K > K} f(e+K) < y < \frac{1}{e} = f(e) \xRightarrow[\text{ZWS}]{f \text{ stetig}} \exists \xi \in (e, e+K) : f(\xi) = y \implies \text{es gibt genau eine Lösung für die Gleichung } (\clubsuit) \text{ im Intervall } [e, \infty).$$

Insgesamt gibt es also im Intervall  $(0, \infty)$  genau zwei Lösungen für  $(\clubsuit)$ .

(ii) Sei nun  $y < 0$ ;

für alle  $x > 1$  :  $f(x) > 0 \implies f(x) \neq y \implies$  es gibt dort keine Lösung.

$f|_{(0, 1]}$  ist streng monoton wachsend  $\implies$  es gibt höchstens eine Lösung für die Gleichung  $(\clubsuit)$  im Intervall  $(0, 1]$

Da  $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = -\infty \implies \exists 0 < \delta < 1 \forall 0 < x < \delta : f(x) < y \implies$

$$f\left(\frac{\delta}{2}\right) < y < f(1) = 0 \xRightarrow[\text{ZWS}]{f \text{ stetig}} \exists \xi \in \left(\frac{\delta}{2}, 1\right) : f(\xi) = y$$

Es gibt also genau eine Lösung für die Gleichung  $(\clubsuit)$  im Intervall  $(0, \infty)$   
 q.e.d.