

## Analysis für Informatiker und Statistiker

### Aufgabe 11 (4 Punkte)

Untersuchen Sie (mit Begründung!) die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität:

- (a)  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \longmapsto (x + 1, x - 1)$
- (b)  $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \longmapsto x_1 + x_2 - 1$

### Aufgabe 12 (4 Punkte)

- (a) Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow X$  Abbildungen mit  $g \circ f = \text{id}_X$  und  $f \circ g = \text{id}_Y$ .  
Zeigen Sie:  $f$  ist bijektiv und  $g$  ist die Umkehrfunktion von  $f$ .
- (b) Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - 1)$ . Zeigen Sie, dass  $f$  eine Umkehrfunktion besitzt und bestimmen Sie diese.

### Aufgabe 13 (4 Punkte)

Sei  $f : X \longrightarrow Y$  eine Abbildung. Zeigen Sie:

- (a)  $\forall A, B \subset X : f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- (b)  $\forall A, B \subset X : f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
- (c)  $f$  injektiv  $\iff \forall A, B \subset X : f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ .  
(Hinweis zum Beweis von " $\Leftarrow$ ": Verwenden Sie einelementige Mengen  $A, B$ .)

### Aufgabe 14 (4 Punkte)

Berechnen Sie:

- (a)  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$
  - (b)  $\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} 2^{k+1} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$
  - (c)  $\sum_{k=1}^n \left( \binom{n}{k} + 1 \right) 3^k \quad (n \in \mathbb{N})$
  - (d)  $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$
- (Hinweis:  $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)} \binom{n-2}{k-2} \quad (2 \leq k \leq n).$  )

*Bitte wenden!*

### Aufgabe 15\*

Sei  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $|n| \geq 2$  und  $k \in \mathbb{N}_0$ , dann kann  $n^k$  unter Verwendung der Dualentwicklung von  $k = \sum_{i=0}^m k_i 2^i$  über die Beziehung

$$n^k = \prod_{i=0}^m \left(n^{k_i 2^i}\right) = (n)^{k_0} \cdot (n^2)^{k_1} \cdots (n^{2^m})^{k_m}$$

effizient berechnet werden, wenn  $n^{2^i}$  durch wiederholtes Quadrieren ermittelt wird.

- (a) Erstellen Sie ein Programm, das  $n^k$  nach dieser Methode berechnet und testen Sie Ihr Programm an selbst gewählten Beispielen. (Hinweis: Die Koeffizienten  $k_0, \dots, k_m$  der Dualentwicklung lassen sich durch Prüfung auf gerade oder ungerade und fortgesetzte ganzzahlige Division durch 2 bestimmen.)
- (b) Geben Sie die maximale Zahl der erforderlichen Multiplikationen zur Auswertung des Produkts an, wenn  $k \leq 2^{m+1} - 1$ . Wieviele Multiplikationen sind im Durchschnitt erforderlich, wenn  $2^m \leq k \leq 2^{m+1} - 1$ ? Beantworten Sie die gleiche Frage für  $0 \leq k \leq 2^{m+1} - 1$ . Begründen Sie, weshalb das angegebene Verfahren für größere  $k$  erheblich effizienter ist als die direkte Auswertung von  $n^k$  mit  $k$  Multiplikationen. (Der Aufwand zur Bestimmung der Dualentwicklung soll außer Betracht bleiben.)

**Abgabe zu zweit oder zu dritt:** Montag, 19.11.2007 bis 16<sup>15</sup> Uhr,  
Übungskasten vor der Bibliothek im 1. Stock

---

\*Diese Zusatzaufgabe soll weitere Anwendungsmöglichkeiten des Vorlesungsstoffes aufzeigen. Sie wird aber nicht korrigiert und ist auch nicht prüfungsrelevant.