

Lösungsvorschläge zu Analysis I für Informatiker

Blatt 8

Für die folgenden Aufgaben werden wir insbesondere diese Aussagen der Vorlesung verwenden:

- (1) $\forall x \in \mathbb{R}$: Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ konvergiert, d.h. die Funktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$; $\exp(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ist wohldefiniert.
(Vorlesung 2.21))
- (2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$: Die Folge $a_n := \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{y}{n^2}\right)^n$ konvergiert und es gilt:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{y}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x) \quad (\text{Vorlesung 2.23}))$$
- (3) $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ist bijektiv und erfüllt die Funktionalgleichung
 $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ (Vorlesung 2.21) und 2.22))
- (4) $\ln : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Umkehrabbildung zu \exp und erfüllt die Funktionalgleichung
 $\forall u, v > 0 : \ln(u \cdot v) = \ln(u) + \ln(v)$ (Vorlesung 2.23)
- (5) $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi \implies \exp(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(\xi)$ (Vorlesung 2.22)e))
- (6) $y_n, \eta > 0$ und $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \eta \implies \ln(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln(\eta)$ (Vorlesung 2.23)e))

37. (4 Punkte)

a) **Behauptung:** $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Beweis:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{(-1/2)}{n}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{(-1/2)}{n}\right)^n \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

(siehe (1) mit $x = -1/2$).

b) **Behauptung:** $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n \ln(n+2) - n \ln(n)} = \sqrt{2}$

Beweis:

$$n(\ln(n+2) - \ln(n)) \stackrel{(4)}{=} n \ln\left(\frac{n+2}{n}\right) \stackrel{(4)}{=} \ln\left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$$

$$\text{Wegen (1) gilt aber } \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^2 \stackrel{(6)}{\implies}$$

$$\stackrel{(6)}{\implies} \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln(e^2) = 2 \stackrel[\text{2.6)a)]]{\text{VL}}$$

$$\sqrt{n \ln(n+2) - n \ln(n)} = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{2}$$

c) **Behauptung:** $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - n}{n^2 + n}\right)^n = \frac{1}{e^2}$

Beweis:

$$\begin{aligned} \left(\frac{n^2 - n}{n^2 + n}\right)^n &= \left[\frac{n(n-1)}{n(n+1)}\right]^n = \left(\frac{\frac{n-1}{n}}{\frac{n}{n+1}}\right)^n = \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(1)} \frac{\frac{1}{e}}{e} = \frac{1}{e^2} \end{aligned}$$

d) **Behauptung:** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2n} + n^n + 1}{(n^2 + n + 1)^n} = \frac{1}{e}$

$$\frac{n^{2n} + n^n + 1}{(n^2 + n + 1)^n} = \frac{n^{2n} + n^n + 1}{\left(n^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right)^n} = \frac{n^{2n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n^n} + \frac{1}{n^{2n}}\right)}{n^{2n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n}$$

$$\text{Es ist für alle } n \in \mathbb{N} : n^{2n} \geq n^n \geq n \geq 1 \implies 0 < \frac{1}{n^{2n}} \leq \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{n}$$

weshalb der Einschließungssatz liefert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2n}} = 0$$

$$\text{Damit folgt für den Zähler: } 1 + \frac{1}{n^n} + \frac{1}{n^{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 + 0 + 0 = 1$$

$$\text{Für den Nenner setze in (2) } x = 1 \text{ und } y = 1 \stackrel{(2)}{\implies}$$

$$\stackrel{(2)}{\implies} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^1 = e$$

$$\implies \frac{n^{2n} + n^n + 1}{(n^2 + n + 1)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e}$$

38. (4 Punkte)

a) **Behauptung:** $\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} \quad (n \in \mathbb{N})$

Beweis:

Aus der Vorlesung ist bekannt:

$$(\alpha) \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

$$(\beta) \quad \text{Die Folge } \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist monoton wachsend und es gilt:}$$

$$(\gamma) \quad \forall n \in \mathbb{N} : 2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < 3$$

Zur linken Seite:

mit Induktion über $n \in \mathbb{N}$: $\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!$

Induktionsanfang $n = 1$: $e \geq 2 > 1 \implies \left(\frac{1}{e}\right)^1 = \frac{1}{e} \leq 1 = 1!$

Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$:

Induktionsvoraussetzung: Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$: $\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!$

Zu zeigen: $\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \leq (n+1)!$

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) \stackrel{\text{IV}}{\geq} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (n+1)$$

Es bleibt zu zeigen, daß $(n+1)! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (n+1) \stackrel{!}{\geq} \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$

Nun gilt aber

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (n+1) \geq \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \iff \frac{n^n}{e^n} \cdot (n+1) \geq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}}$$

$$\stackrel{\cdot e^{n+1}}{\iff} e \cdot n^n (n+1) \geq (n+1)^{n+1}$$

$$\iff e \geq \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n (n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

und das gilt wegen (γ) . q.e.d.

Zur rechten Seite (wurde bereits im Tutorium bewiesen):

Induktion nach $n \in \mathbb{N}$: $n! \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$

Induktionsanfang $n = 1$: $1! \leq \frac{(1+1)^{1+1}}{e^1} \iff 1 \leq \frac{4}{e} \iff e \leq 4$

und das gilt mit (γ) .

Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$:

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei $n! \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$

Zu zeigen: $(n+1)! \leq \frac{(n+2)^{n+2}}{e^{n+1}}$

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) \stackrel{\text{IV}}{\leq} \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} \cdot (n+1) = \frac{(n+1)^{n+2}}{e^n}$$

Bleibt zu zeigen: $\frac{(n+1)^{n+2}}{e^n} \stackrel{!}{\leq} \frac{(n+2)^{n+2}}{e^{n+1}}$

Nun gilt aber:

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^{n+2}}{e^n} &\leq \frac{(n+2)^{n+2}}{e^{n+1}} \stackrel{\cdot e^{n+1}}{\iff} e \cdot (n+1)^{n+2} \leq (n+2)^{n+2} \iff e \leq \frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+2}} = \\ &= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \end{aligned}$$

und das gilt wegen Aufgabe 40)b), wo gezeigt wird, daß die Folge $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

monoton fällt mit Grenzwert e , d.h es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$,

also auch $e \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$ q.e.d.

b) **Behauptung:** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{e}$

Beweis:

Nach Teil (a) gilt: $\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} \quad (n \in \mathbb{N})$

$$\iff \frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$$

$$\stackrel{\cdot \frac{1}{n^n}}{\iff} \frac{1}{e^n} \leq \frac{1}{n^n} \cdot n! \leq \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{n^n} \cdot \frac{1}{e^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (n+1) \cdot \frac{1}{e^n}$$

$$\stackrel{n\text{-te Wurzel}}{\iff} \frac{1}{e} \leq \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \sqrt[n]{n+1} \cdot \frac{1}{e}$$

Mit $\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ und $\sqrt[n]{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ (Tutorium) folgt:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{e} & \leq & \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} & \leq & \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \sqrt[n]{n+1} \cdot \frac{1}{e}} \\ \downarrow n \rightarrow \infty & & & & \downarrow n \rightarrow \infty \\ \frac{1}{e} & & & & \frac{1}{e} \end{array}$$

so daß mit dem Sandwich-Lemma die Behauptung bewiesen ist.

c) **Behauptung:** $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = 4$

Beweis:

$$\sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \stackrel{\text{Def.}}{=} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n! \cdot (2n-n)!}} = \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{\sqrt[n]{(n!)^2}} = \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{\left(\sqrt[n]{n!}\right)^2} \stackrel{\text{erweitern}}{=}$$

$$\stackrel{=}{\text{erweitern}} \frac{n^2}{\left(\sqrt[n]{n!}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n^2}$$

Nun gilt wegen Teil (b):

$$\left(\frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}\right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e}\right)^2 \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n^2} &= \frac{\left(\sqrt{\sqrt[n]{(2n)!}}\right)^2}{n^2} = 4 \cdot \frac{\left(\sqrt[2n]{(2n)!}\right)^2}{4n^2} \\ &= 4 \cdot \left(\frac{1}{2n} \sqrt[2n]{(2n)!}\right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4 \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^2 \end{aligned}$$

Dies gilt, weil die Folge $\left(\frac{1}{2n} \sqrt[2n]{(2n)!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ als Teilfolge von $\left(\frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ wie diese gegen $\frac{1}{e}$ konvergiert (siehe Teil(b)).

Also:

$$\sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{e^2}} \cdot \frac{4}{e^2} = e^2 \cdot \frac{4}{e^2} = 4$$

d) Hier sollte der Grenzwert aus Teil (c) mit Hilfe der Stirlingformel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1 \quad \text{bestimmt werden.}$$

$$\text{Wie oben ist } \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}.$$

Wir verwenden den Folgenterm der Stirlingformel:

$$a_n := \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} \Rightarrow a_{2n} = \frac{(2n)!}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}} \Rightarrow$$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \stackrel{=}{\text{erweitern}}$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\frac{(2n)!}{\left[\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \cdot \sqrt{4\pi n}\right]}}_{= a_{2n}} \cdot \underbrace{\left[\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}\right] \cdot \frac{\left\{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \cdot 2\pi n\right\}}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{\left\{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \cdot 2\pi n\right\}}}_{= \frac{1}{a_n^2}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{2n} \cdot \left[\left(\frac{2n}{e} \right)^{2n} \sqrt{4\pi n} \right] \cdot \left\{ \frac{\left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n}}{n!} \right\}^2 \frac{1}{\left[\left(\frac{n}{e} \right)^{2n} \cdot 2\pi n \right]} = \\
&= a_{2n} \cdot \frac{1}{a_n^2} \cdot \frac{\left[\left(\frac{2n}{e} \right)^{2n} \sqrt{4\pi n} \right]}{\left[\left(\frac{n}{e} \right)^{2n} \cdot 2\pi n \right]} \stackrel{\text{kürzen}}{=} \frac{a_{2n}}{a_n^2} \cdot \frac{(2n)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{n^{2n} \cdot \sqrt{4\pi^2 n^2}} = \\
&= \frac{a_{2n}}{a_n^2} \cdot 2^{2n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \frac{a_{2n}}{a_n^2} \cdot 4^n \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{\binom{2n}{n}} &= \sqrt[n]{\frac{a_{2n}}{a_n^2} \cdot 4^n \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a_{2n}}}{\sqrt[n]{a_n^2}} \cdot 4 \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{\pi}}} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \\
&= 4 \cdot \frac{\left(\sqrt[n]{a_{2n}} \right)^2}{\left(\sqrt[n]{a_n} \right)^2} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{\pi}}} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}}
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

Im Tutorium wurde gezeigt: $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

Damit gilt auch für die Teilfolge $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}} : \sqrt[n]{a_{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

Ferner:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{\pi}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad (\text{Vorlesung 2.7)c})$$

$$\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \implies \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \stackrel{\text{VL 2.6)a)}}{\implies} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Also:

$$\sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = 4 \cdot \frac{\left(\sqrt[n]{a_{2n}} \right)^2}{\left(\sqrt[n]{a_n} \right)^2} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{\pi}}} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4 \cdot \frac{1^2}{1^2} \cdot 1 \cdot 1 = 4 \quad \text{q.e.d.}$$

Wiederholen wir den Beweis zu $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ aus dem Tutorium, gleich in allgemeinerer Form:

Behauptung: Ist $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge mit $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b > 0$, so gilt $\sqrt[n]{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

Beweis:

Nach Definition gilt:

$$b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \iff \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \implies |b_n - b| < \epsilon \quad (*)$$

Dabei gilt $|b_n - b| < \epsilon \iff b - \epsilon < b_n < b + \epsilon$

Wähle nun $\epsilon := \frac{b}{2}$; dann gibt es wegen $(*)$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq N$ gilt:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 < \frac{b}{2} = b - \epsilon < b_n < b + \epsilon = \frac{3b}{2} & \implies & \sqrt[n]{\frac{b}{2}} & < & \sqrt[n]{b_n} & < & \sqrt[n]{\frac{3b}{2}} \\
& & \downarrow n \rightarrow \infty & & & & \downarrow n \rightarrow \infty \\
& & 1 & & & & 1
\end{array}$$

Damit liefert das Sandwich-Lemma die Behauptung: $\sqrt[n]{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ q.e.d.

39. (4 Punkte)

Behauptung: Der hyperbolische Sinus $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ist bijektiv und hat die Umkehrfunktion $\sinh^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; y \mapsto \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$

Beweis:

Zu zeigen ist: Die Funktion \sinh ist

surjektiv \iff zu jedem $y \in \mathbb{R}$ gibt es mindestens ein $x \in \mathbb{R}$ mit $y = \sinh(x)$, und

injektiv \iff zu jedem $y \in \mathbb{R}$ gibt es höchstens ein $x \in \mathbb{R}$ mit $y = \sinh(x)$,

insgesamt also:

$$\forall y \in \mathbb{R} \exists_1 x \in \mathbb{R} : y = \sinh(x)$$

Sei also $y \in \mathbb{R}$; gesucht ist ein $x \in \mathbb{R}$ mit:

$$\begin{aligned} y = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} &\iff 2y = e^x - e^{-x} \xrightarrow{\cdot e^x} 2ye^x = (e^x)^2 - 1 \iff \\ &\iff (e^x)^2 - 2y \cdot e^x = 1 \\ &\iff (e^x)^2 - 2ye^x + y^2 = y^2 + 1 \quad (\text{quadratische Ergänzung}) \\ &\iff (e^x - y)^2 = y^2 + 1 \\ &\iff |e^x - y| = \sqrt{y^2 + 1} \\ &\iff e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \iff (\clubsuit) \end{aligned}$$

Da für alle $x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$ ist, muß $e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1} > 0$ gelten.

Da aber für alle $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y^2 < y^2 + 1 &\iff |y| < \sqrt{y^2 + 1} \implies y < \sqrt{y^2 + 1} \iff \\ &\iff y - \sqrt{y^2 + 1} < 0 \end{aligned}$$

ist also $y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$ immer wahr, weshalb

$$\begin{aligned} (\clubsuit) &\iff e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \\ &\iff x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \end{aligned}$$

Damit ist also \sinh bijektiv und seine Umkehrfunktion ist bestimmt durch

$$\sinh^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \quad \text{q.e.d.}$$

40. (4 Punkte)

Für $a > 0$ sei $a^x := \exp(x \ln(a))$ die Exponentialfunktion zur Basis a .

(a) **Behauptung:** $(ab)^x = a^x b^x \quad (a, b > 0, x \in \mathbb{R})$

Beweis:

$$\begin{aligned} (ab)^x &\stackrel{\text{Def.}}{=} \exp(x \ln(ab)) \stackrel{(4)}{=} \exp(x(\ln(a) + \ln(b))) = \exp(x \ln(a) + x \ln(b)) \stackrel{(3)}{=} \\ &= \exp(x \ln(a)) \cdot \exp(x \ln(b)) \stackrel{\text{Def.}}{=} a^x \cdot b^x \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

(b) **Behauptung:** $(a^x)^y = a^{xy}$ ($a > 0, x, y \in \mathbb{R}$)

Beweis:

Da $a^x = \exp(x \ln(a)) > 0$ ist $(a^x)^y$ wohldefiniert.

$$\begin{aligned} (a^x)^y &\stackrel{\text{Def.}}{=} \exp(y \ln(a^x)) \stackrel{\text{Def.}}{=} \exp(y \underbrace{\ln[\exp(x \ln(a))]}_{=id_{\mathbb{R}}}) = \exp(y(x \ln(a))) = \\ &= \exp(xy \ln(a)) \stackrel{\text{Def.}}{=} a^{xy} \end{aligned}$$

(c) **Behauptung:** $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$ ($1 \neq a > 0, x > 0, y \in \mathbb{R}$)

Beweis:

Nach Vorlesung 2.24)d) gilt für alle $1 \neq a > 0$ und $x > 0$: $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ (*)

Also:

$$\log_a(x^y) \stackrel{(*)}{=} \frac{\ln(x^y)}{\ln(a)} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\ln(\exp(y \ln(x)))}{\ln(a)} \stackrel{\ln \circ \exp = id_{\mathbb{R}}}{=} \frac{y \ln(x)}{\ln(a)} = y \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \stackrel{(*)}{=} y \log_a(x)$$

q.e.d.

(d) **Behauptung:** $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ ($1 \neq a > 0, 1 \neq b > 0, x > 0$)

Beweis:

$$\log_a(x) \stackrel{(*)}{=} \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \stackrel{\substack{\text{erweitern} \\ b \neq 1}}{=} \frac{\frac{\ln(x)}{\ln(b)}}{\frac{\ln(a)}{\ln(b)}} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

(e) **Behauptung:** Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller Zahlen mit $a_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$) und $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = a^b$$

Beweis:

$a_n^{b_n} \stackrel{\text{Def.}}{=} \exp(b_n \ln(a_n))$. Ferner:

$$\left. \begin{array}{l} a_n > 0, a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0 \xRightarrow{(6)} \ln(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln(a) \\ b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \end{array} \right\} \implies b_n \ln(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \ln(a)$$

$$\stackrel{(5)}{\implies} a_n^{b_n} = \exp(b_n \ln(a_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(b \ln(a)) = a^b = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \quad \text{q.e.d.}$$

(f) **Behauptung:** Die Aussage in (e) ist im allgemeinen falsch, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Beweis:

Wir müssen ein Gegenbeispiel konstruieren, so daß:

$\forall n \in \mathbb{N} : a_n > 0$ und $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a = 0$, $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \in \mathbb{R}$, aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} \neq \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = a^b = 0^b$$

Für $b \notin \mathbb{N}_0$ ist 0^b nicht definiert, und für $b \in \mathbb{N}$ gilt: $a^b = 0^b = 0$ und zugleich für $a_n > 0 : b_n \ln(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$, denn:

$$0 < a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \xrightarrow[2.26)d]{\text{VL}} \ln(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty, \text{ d.h. nach Definition 2.25 der VL:}$$

$$\forall M > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies \ln(a_n) \leq -M \quad (\star).$$

Ferner:

$$b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \geq 1 \xrightarrow[\text{Def.}]{} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \implies$$

$$\implies \left[|b - b_n| < \frac{b}{2} \implies b - b_n < \frac{b}{2} \iff b_n > \frac{b}{2} \right].$$

Ist nun $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß für alle $n \geq n_0 : \ln(a_n) \leq -\frac{2M}{b}$ gemäß (\star) ,

so folgt für alle $n \geq N_1 := n_0 + N : b_n > \frac{b}{2}$ und $\ln(a_n) \leq -\frac{2M}{b} \implies$

$$\xrightarrow[\ln(a_n) < 0]{\text{da}} b_n \cdot \ln(a_n) < \frac{b}{2} \cdot \ln(a_n) < \frac{b}{2} \cdot \left(-\frac{2M}{b} \right) = -M \xrightarrow[2.25)]{\text{Def. VL}} b_n \ln(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

Damit nach Vorlesung $a_n^{b_n} = \exp(b_n \ln(a_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = 0^b$, weshalb also für $b \in \mathbb{N}$ die Aussage aus (e) richtig ist. Ein Gegenbeispiel ist also nur für $b = 0$ möglich.

Sei also $b = 0$.

1. Beispiel:

Weil $0^0 = 1$ wähle $a_n := \frac{1}{e^{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ und $b_n := \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Dann folgt:

$$a_n^{b_n} = \exp(b_n \ln(a_n)) = \exp\left(\frac{1}{n} \cdot \ln(e^{-n^2})\right) = \exp\left(\frac{1}{n} \cdot (-n^2)\right) = \exp(-n).$$

Nach Vorlesung 2.26)b) gilt $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-n) = 0$, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = 0 \neq 1 = 0^0.$$

2. Beispiel:

$$a_n := \frac{1}{e^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ und } b_n := \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies$$

$$a_n^{b_n} = \exp\left(\frac{1}{n} \cdot \ln(e^{-n})\right) = \exp\left(\frac{1}{n} \cdot (-n)\right) = \exp(-1), \text{ d.h. } a_n^{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \neq 1 = 0^0.$$

41. (a) **Behauptung:** $\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

Beweis:

Zu zeigen ist:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \xLeftrightarrow[\text{Wurzel}]{(n+1)\text{-te}} \sqrt[n+1]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} < 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Dies beweisen wir mit Hilfe der AGM-Ungleichung (**):

$$\begin{aligned} \sqrt[n+1]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} &= \sqrt[n+1]{\underbrace{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}_{(n+1) \text{ Faktoren}}} &<_{(**)} &\frac{1}{n+1} \left(1 + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left(1 + n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n+1} (1 + n - 1) = \\ &= \frac{(n+1) - 1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Dabei gilt in (**) „<“, weil die Faktoren 1 und $1 - \frac{1}{n}$ verschieden sind, d.h. die Folge ist sogar streng monoton wachsend.

- (b) **Behauptung:** $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} := \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

Beweis: (Mit Hilfe von (a))

Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt:

$$\begin{aligned} c_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(\frac{(n+1)-1}{n+1}\right)^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} <_{(\clubsuit)} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} = \\ &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(\frac{(n-1)+1}{n-1}\right)^n = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{(n-1)+1} = c_{n-1} \end{aligned}$$

also $c_n < c_{n-1}$ für alle $n \geq 2$.

Dabei gilt (\clubsuit) wegen Teil (a) : $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$, da die Folge in (a) ja monoton wächst. q.e.d.

(c) **Behauptung:** $\forall n \in \mathbb{N} : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

Beweis:

Nach Vorlesung gilt: $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend mit Grenzwert e ,
insbesondere also:

$\forall n \in \mathbb{N} : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$, d.h. die linke Seite der Ungleichung.

Zur rechten Seite:

Nach Teil (b) ist die Folge $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und es gilt mit

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e :$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \cdot 1 = e.$$

Damit folgt $\forall n \in \mathbb{N} : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq e$, da aus der Existenz eines $N \in \mathbb{N}$ mit

$\left(1 + \frac{1}{N}\right)^{N+1} < e$ folgen würde, daß für alle $n \geq N$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \underset{\text{monoton fallend}}{<} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{N+1} < e \xrightarrow[\text{Lemma}]{\text{Sandwich-Lemma}} e \leq \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{N+1} < e \quad \text{fl}$$