

Lösungsvorschläge zu Analysis I für Informatiker

Blatt 12

56. (4 Punkte)

- (a) **Behauptung:** Sei $f : I \rightarrow I$ stetig mit $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Dann hat f einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x \in I : f(x) = x$.

Beweis:

Wir wollen den Beweis wie im Hinweis vorgeschlagen mit Hilfe des Zwischenwertsatzes führen. Dieser lautet:

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sind dann $u, v \in I$ mit $u < v$, so daß $g(u) < y < g(v)$ für ein $y \in \mathbb{R}$, so gibt es ein $\xi \in]u, v[$ mit $g(\xi) = y$.

Betrachte die Funktion $g(x) := x - f(x) \implies g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist mit Summenregel als Summe der stetigen Funktionen $id(x) := x$ und f stetig.

Dann lautet die Behauptung:

$$\exists x \in [a, b] : g(x) = x - f(x) = 0$$

Nun ist nach Voraussetzung $\forall x \in I = [a, b] : f(x) \in [a, b] \implies f(a) \in [a, b] \implies a \leq f(a) \implies g(a) = a - f(a) \leq 0$

Ebenso folgt mit $f(b) \in [a, b] : f(b) \leq b \implies g(b) = b - f(b) \geq 0$, d.h. insgesamt: $g(a) \leq 0 \leq g(b)$.

Falls $f(a) = a$, so setze $x := a$, und dieses x erfüllt die Bedingung.

Falls $f(b) = b$, so setze $x := b$, und dieses x ist geeignet.

Falls keiner dieser beiden Fälle eintritt, d.h. $a < f(a)$ und $b > f(b)$, so gilt:

$a - f(a) = g(a) < 0 < g(b) = b - f(b) \xrightarrow[\text{satz}]{\text{Zwischenwert-}}$ es gibt ein $\xi \in]a, b[: g(\xi) = 0$
 $\implies f(\xi) = \xi$. Setze also $x := \xi$, d.h. auch in diesem Fall gilt die Behauptung.

- (b) Für beliebige stetige Abbildungen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (d.h. mit $I = \mathbb{R}$) gilt die Aussage aus Teil (a) nicht.

Gegenbeispiel:

Wenn für eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Punkt $x \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) = x$, so heißt das, daß der Graph von f die Winkelhalbierende des ersten und dritten Quadranten, d.h. den Graphen der Funktion $id(x) = x$ schneidet. Die Aufgabe besteht also darin, eine stetige Funktion zu finden, die diese Winkelhalbierende nicht schneidet, die also zum Beispiel ganz unterhalb oder oberhalb von ihr verläuft.

Geeignet ist beispielsweise die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x) := x + 1 ,$$

denn dann gilt: $f(x) = x \iff x + 1 = x \iff 1 = 0 \quad \nmid$

Also liefert diese Funktion ein Gegenbeispiel.

57. (a) **Behauptung:** Die Abbildung $f(x) := a^{\sqrt{x^2+1}}$ ($a > 0, x \in \mathbb{R}$) ist differenzierbar in ganz \mathbb{R} mit der Ableitung

$$f'(x) = a^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x \ln(a)}{\sqrt{x^2+1}}$$

Beweis:

- (i) Zunächst ist die Wurzelfunktion

$$w_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; w_n(y) := \sqrt[n]{y}$$

differenzierbar:

$\forall y > 0 : w_n(y) = \sqrt[n]{y} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(y)\right)$ ist differenzierbar, weil die Abbildung \exp auf ganz \mathbb{R} und die Abbildung \ln auf dem Intervall $(0, \infty)$ differenzierbar ist, und damit auch die Komposition $\exp\left(\frac{1}{n} \ln(y)\right)$ auf $(0, \infty)$ differenzierbar ist nach der Kettenregel.

Für die Ableitung gilt:

$$w'_n(y) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \exp'\left(\frac{1}{n} \ln(y)\right) \cdot \left(\frac{1}{n} \ln'(y)\right) \stackrel{\substack{\exp'=\exp \\ \ln'=\frac{1}{y}}}{=} \exp\left(\frac{1}{n} \ln(y)\right) \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt[n]{y^{n-1}}}.$$

- (ii) Auch die Funktion

$$\alpha : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; \alpha(x) := a^x \stackrel{\text{Definition}}{=} \exp(x \ln(a))$$

ist als Komposition differenzierbarer Funktionen (\exp und id) nach der Kettenregel differenzierbar mit der Ableitung

$$\alpha'(x) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \exp'(x \ln(a)) \cdot \ln(a) \stackrel{\exp'=\exp}{=} \exp(x \ln(a) \ln(a)) \stackrel{\text{Def.}}{=} a^x \ln(a) .$$

Setzt man nun $h(x) := x^2 + 1$, so ist h als Polynom differenzierbar und es folgt:

$f(x) = a^{\sqrt{x^2+1}} = \alpha(\sqrt{x^2+1}) = \alpha(w_2(h(x))) = (\alpha \circ w_2 \circ h)(x)$, d.h. $f = \alpha \circ w_2 \circ h$ ist als Komposition von drei differenzierbaren Funktionen nach Kettenregel differenzierbar, und für die Ableitung folgt:

$$\begin{aligned} f'(x) &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \alpha'((w_2 \circ h)(x)) \cdot (w_2 \circ h)'(x) \stackrel{\substack{\text{Kettenregel} \\ (ii)}}{=} a^{\sqrt{x^2+1}} \ln(a) \cdot w'_2(h(x)) \cdot h'(x) \stackrel{(i)}{=} \\ &\stackrel{(i)}{=} a^{\sqrt{x^2+1}} \ln(a) \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = a^{\sqrt{x^2+1}} \frac{x \ln(a)}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

- (b) **Behauptung:** Die Abbildung $f(x) := \ln(x^4 + 1) \cdot \ln(\sqrt{x} + 1)$ ($x > 0$) ist differenzierbar auf $(0, \infty)$ mit der Ableitung

$$f'(x) = \frac{4x^3}{x^4 + 1} \ln(\sqrt{x} + 1) + \frac{1}{2(x + \sqrt{x})} \ln(x^4 + 1)$$

Beweis:

$p(x) := x^4 + 1$ ist ein Polynom und damit auf ganz \mathbb{R} differenzierbar.

\ln ist auf $(0, \infty)$ differenzierbar, und da für alle $x \in \mathbb{R} : p(x) = x^4 + 1 > 0$ ist auch die Komposition $\ln \circ p$ in ganz \mathbb{R} differenzierbar.

Die Wurzelfunktion w_2 ist nach Teil (a(i)) im Intervall $(0, \infty)$ differenzierbar und damit ist wieder nach Kettenregel die Funktion $\ln(\sqrt{x} + 1) = \ln \circ (w_2 + 1)$ differenzierbar auf $(0, \infty)$: denn es ist $\sqrt{x} + 1 > 0$ für alle $x > 0$

Nach der Produktregel ist damit auch $f = (\ln \circ p) \cdot (\ln \circ (w_2 + 1))$ im Intervall $I = (0, \infty)$ differenzierbar, und für die Ableitung folgt:

$$\begin{aligned} f'(x) &\stackrel{\text{Produktregel}}{=} (\ln \circ p)'(x) \cdot (\ln \circ (w_2 + 1))(x) + (\ln \circ p)(x) \cdot (\ln \circ (w_2 + 1))'(x) = \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \ln'(p(x)) \cdot p'(x) \ln(\sqrt{x} + 1) + \ln(x^4 + 1) \cdot \ln'((w_2 + 1)(x)) \cdot (w_2 + 1)'(x) = \\ &= \frac{1}{p(x)} p'(x) \ln(\sqrt{x} + 1) + \ln(x^4 + 1) \cdot \frac{1}{w_2(x) + 1} \cdot w_2'(x) = \\ &\stackrel{\text{Teil (a)(i)}}{=} \frac{1}{x^4 + 1} 4x^3 \ln(\sqrt{x} + 1) + \ln(x^4 + 1) \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} = \\ &= \frac{4x^3}{x^4 + 1} \ln(\sqrt{x} + 1) + \frac{1}{2(x + \sqrt{x})} \ln(x^4 + 1) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

- (c) **Behauptung:** Die Abbildung $f(x) := \sqrt[n]{\frac{x}{\ln(x)}}$ ($\mathbb{N} \ni n \geq 2, x > 1$) ist differenzierbar auf dem Intervall $(1, \infty)$ mit der Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{x}{\ln(x)}} \cdot \frac{\ln(x) - 1}{x \ln(x)}$$

Beweis:

Mit den Bezeichnungen aus Teilaufgabe (a)(i) ist

$f(x) = \sqrt[n]{\frac{x}{\ln(x)}} = w_n\left(\frac{x}{\ln(x)}\right) = w_n \circ \left(\frac{id}{\ln}\right)(x) \implies f = \left(w_n \circ \left(\frac{id}{\ln}\right)\right)$, und zwar dort, wo diese Komposition definiert ist: wegen der \ln -Funktion muß $x > 0$ gelten, und da das Argument der Wurzelfunktion w_n positiv sein muß, ist $\frac{x}{\ln(x)} > 0$ sowie $\ln(x) \neq 0$ zu fordern. Wegen der Bedingung $x > 0$ muß also $\ln(x) > 0 \iff x > 1$ gelten. Für das Intervall $(1, \infty)$ sind dann alle Komponenten der Komposition $f = w_n \circ \left(\frac{id}{\ln}\right)$ wohldefiniert und differenzierbar, weshalb mit der Quotientenregel und der Kettenregel folgt, daß auch f differenzierbar ist.

Für die Ableitung erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &\stackrel{\text{Ketten-}}{=} \text{regel} \quad w'_n \left(\frac{x}{\ln(x)} \right) \cdot \left(\frac{id}{\ln} \right)'(x) = \\
 &\stackrel{\text{Quotienten-}}{=} \text{regel} \quad \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{x}{\ln(x)} \right)^{n-1}}} \cdot \frac{\ln(x) \cdot 1 - x \ln'(x)}{(\ln(x))^2} = \\
 &\stackrel{(a)(i)}{=} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(\ln(x))^{n-1}}{x^{n-1}}} \cdot \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2} = \\
 &\stackrel{\ln' = \frac{1}{id}}{=} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(\ln(x))^{n-1}}{x^{n-1}}} \cdot \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2} = \\
 &\stackrel{\text{erweitern}}{=} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(\ln(x))^{n-1}}{x^{n-1}}} \cdot \frac{\ln(x)x}{\ln(x)x} \cdot \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2} = \\
 &= \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(\ln(x))^n}{x^n}} \cdot \frac{x}{\ln(x)} \cdot \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2} = \\
 &= \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{x}{\ln(x)}} \cdot \frac{\ln(x)}{x} \cdot \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2} = \\
 &= \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{x}{\ln(x)}} \cdot \frac{\ln(x) - 1}{x \ln(x)} \quad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

- (d) **Behauptung:** Die Abbildung $f(x) := x^{(x^x)} \quad (x > 0)$ ist differenzierbar auf dem Intervall $(0, \infty)$ mit der Ableitung

$$f'(x) = x^{(x^x + x - 1)} \left(x \ln(x)^2 + x \ln(x) + 1 \right)$$

Beweis:

Die Abbildung $g(x) := x^x = \exp(x \ln(x))$ ist auf dem Intervall $(0, \infty)$ differenzierbar nach Produkt- und Kettenregel mit der Ableitung

$$g'(x) = \exp'(x \ln(x)) \cdot (1 \cdot \ln(x) + x \cdot \ln'(x)) = x^x (\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x (\ln(x) + 1) \quad (*).$$

Also ist auch $f(x) = x^{(x^x)} = \exp(x^x \ln(x)) = \exp(g(x) \ln(x))$ als Komposition auf $(0, \infty)$ differenzierbarer Funktionen nach der Produkt- und Kettenregel wieder differenzierbar, und für die Ableitung gilt mit $f(x) = (\exp \circ (g \cdot \ln))(x)$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &\stackrel{\text{Ketten-}}{=} \text{regel} \quad \exp'((g \cdot \ln)(x)) \cdot (g \cdot \ln)'(x) = \\
 &\stackrel{\text{Produkt-}}{=} \text{regel} \quad \exp(x^x \ln(x)) \cdot (g'(x) \ln(x) + g(x) \ln'(x)) = \\
 &\stackrel{\exp' = \exp}{=} \exp(x^x \ln(x)) \cdot (g'(x) \ln(x) + g(x) \ln'(x)) = \\
 &\stackrel{(*)}{=} \text{Def.} \quad x^{(x^x)} \cdot \left(x^x (\ln(x) + 1) \ln(x) + x^x \frac{1}{x} \right) = x^{(x^x)} \cdot x^x \left((\ln(x) + 1) \ln(x) + \frac{1}{x} \right) \\
 &= x^{(x^x + x - 1)} \left(x \ln(x)^2 + x \ln(x) + 1 \right) \quad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

58. Sei $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $f(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$ ($x \in \mathbb{R}$)

(a) **Gesucht:** Lage der Extrema von f und das Minimum von f

Um bequemer argumentieren zu können vorneweg ein kleiner Hilfssatz:

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) streng monoton, so auch auf $[a, b]$. (♣)

Beweis:

Ohne Einschränkung sei f streng monoton wachsend auf (a, b) . Definiere für ein beliebiges $a < x < b$: $x_n := a + \frac{x-a}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$a < a + \frac{x-a}{n+1} = x_{n+1} < a + \frac{x-a}{n} = x_n \leq a + \frac{x-a}{1} = x \text{ und}$$

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \xRightarrow{f \text{ stetig}} f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a).$$

Wegen der strengen Monotonie von f ist dann aber für $n \geq 2$:

$$f(x_{n+1}) < f(x_n) \leq f(x_2) < f(x_1) = f(x) \xRightarrow[\text{lemma}]{\text{Sandwich-}} f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq f(x_2) < f(x),$$

insbesondere also $f(a) < f(x)$

Auf die gleiche Weise kann man im Punkte b und für „streng monoton fallend“ argumentieren. q.e.d.

Laut Vorlesung ist eine notwendige Bedingung dafür, daß in einem Punkt a eines offenen Intervalls ein Extremum vorliegt, daß $f'(a) = 0$.

Hier wählen wir als offenes Intervall $I = (0, \infty)$, verzichten also vorläufig auf den Randpunkt $x = 0$.

Die Funktion f ist ein Polynom, also stetig differenzierbar und es gilt:

$$f'(x) = (n+1)x^n - 2nx^{n-1} = x^{n-1}((n+1)x - 2n) \quad (*)$$

Damit folgt:

$$f'(x) = 0 \xLeftrightarrow{x>0} (n+1)x - 2n = 0 \xLeftrightarrow{x = \frac{2n}{n+1}}.$$

Die Funktion f kann also höchstens ein (lokales) Extremum besitzen, und zwar im Punkte $a := \frac{2n}{n+1}$.

Nun untersuchen wir, ob in a überhaupt ein Extremum vorliegt und wenn ja, ob Maximum oder Minimum. Dazu:

$$\begin{aligned} \forall 0 < x < a = \frac{2n}{n+1} : x < \frac{2n}{n+1} &\iff (n+1)x < 2n \iff \\ \iff (n+1)x - 2n < 0 &\iff f'(x) < 0 \xRightarrow[(*)]{\text{Vorl. (5.12)}} f \text{ streng monoton fallend auf } (0, a) \\ \implies f|_{[0, a]} \text{ ist streng monoton fallend} &\implies \end{aligned}$$

$$\forall 0 < x < a : 1 = f(0) > f(x) > f(a).$$

$$\begin{aligned} \forall a < x : \frac{2n}{n+1} < x &\iff 2n < x(n+1) \xRightarrow[(*)]{\text{Vorl. (5.12)}} f'(x) > 0 \\ f \text{ streng monoton wachsend auf } (a, \infty) &\xRightarrow{(\clubsuit)} f|_{[a, \infty]} \text{ streng monoton wachsend} \\ \implies \forall a < x : f(a) < f(x) \end{aligned}$$

Also:

$$\left. \begin{array}{ll} \forall 0 \leq x < a & : 1 = f(0) \geq f(x) > f(a) \\ \forall a < x & : f(a) < f(x) \end{array} \right\} \implies \forall 0 \leq x \neq a : f(x) > f(a)$$

d.h. f hat im Punkt a ein (globales) Minimum, und es ist

$$f(a) = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{n+1} - 2\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n + 1.$$

Zudem folgt aus $\forall 0 < x < a : 1 = f(0) > f(x) > f(a)$, daß f im Punkte 0 (d.h. am Rand des Intervalls $[0, \infty)$) ein lokales Maximum mit Wert 1 besitzt.

Insgesamt also:

f hat genau ein (globales) Minimum in $a = \frac{2n}{n+1}$ und ein (lokales) Maximum in 0.

(b) **Behauptung:** f hat genau 2 Nullstellen im Intervall $[1, \infty)$

Beweis:

Im Punkt $x = 1$ gilt: $f(1) = 1^{n+1} - 2 \cdot 1^n + 1 = 0$, d.h. eine Nullstelle $\xi_1 = 1$ im Intervall $[1, \infty)$ ist bereits gefunden.

$$\text{Nun ist } 1 < a = \frac{2n}{n+1} \iff n+1 < 2n \iff 1 < n$$

$n = 1$: $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 > 0$ für $x \neq 1 \implies f$ hat überhaupt nur eine Nullstelle, nämlich $x = 1$.

$n > 1$: Dann ist $1 < a \wedge f|_{[0, a]}$ streng fallend $\wedge f(1) = 0 \implies \forall 1 < x < a : 0 = f(1) > f(x) > f(a) \implies$ keine weitere Nullstelle in diesem Teilintervall $[1, a]$.

Nun gilt $f(2) = 2^{n+1} - 2 \cdot 2^n + 1 = 1 > 0 > f(a)$ und $2 > a$

$$(\text{denn: } 2 > a = \frac{2n}{n+1} \iff 2n+2 > 2n)$$

d.h. es folgt aus dem Zwischenwertsatz mit der Stetigkeit von f :

$$\exists \xi_2 \in (a, 2) : f(\xi_2) = 0$$

\implies es gibt eine zweite Nullstelle mit $\xi_1 = 1 < a < \xi_2 < 2$ im Intervall $[a, \infty)$.

Da aber nach Teil (a) $f|_{[a, \infty)}$ streng monoton wachsend ist, kann es im Intervall $[a, \infty)$ nur höchstens eine Nullstelle geben, also gibt es im Teilintervall $[a, \infty)$ genau eine Nullstelle, in beiden Teilintervallen zusammen, d.h. in $[1, \infty)$, also genau 2 Nullstellen q.e.d.

59. Sei $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ ($x > 0$)

(a) **Behauptung:** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

Die Funktion f besitzt genau ein Maximum, und zwar an der Stelle $x = e$.

Beweis:

Die beiden Grenzwerte wurden bereits bestimmt, und zwar in Aufgabe 53(b) von Blatt 11. Es geht also nur noch um die Untersuchung auf Maxima.

Eine notwendige Bedingung dafür, daß ein Extremum vorliegt, ist $f'(x) = 0$ ($(0, \infty)$ ist ein Intervall). Also:

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{Def.}}{=} \exp\left(\frac{1}{x} \ln(x)\right) = \left(\exp \circ \left(\frac{\ln}{id}\right)\right)(x) \implies f = \left(\exp \circ \left(\frac{\ln}{id}\right)\right),$$

d.h. f ist differenzierbar auf dem Intervall $(0, \infty)$ nach Quotienten- und Kettenregel mit der Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp'\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) \cdot \left(\frac{id \cdot \ln' - 1 \cdot \ln}{id^2}\right)(x) = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(x)\right) \cdot \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln(x)}{x^2} = \\ &= x^{\frac{1}{x}} \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \quad (**) \end{aligned}$$

Damit:

$$f'(x) = 0 \stackrel{(**)}{\iff_{x>0}} 1 - \ln(x) = 0 \iff \ln(x) = 1 \iff x = e$$

Damit kann f im Intervall $(0, \infty)$ höchstens ein Extremum besitzen, und zwar im Punkte $a := e$. Nun gilt:

$$\forall 0 < x < e : \ln(x) < \ln(e) = 1 \iff 1 - \ln(x) > 0 \implies f'(x) > 0 \stackrel{\text{Vorl. (5.12)}}{\implies}$$

$f|_{(0, e]}$ ist streng monoton wachsend (siehe Hilfssatz aus Aufgabe 58(a) (♣)).

$$\forall e < x : 1 = \ln(e) < \ln(x) \iff 1 - \ln(x) < 0 \implies f'(x) < 0 \stackrel{\text{dito}}{\implies}$$

$f|_{[e, \infty)}$ ist streng monoton fallend

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} \forall 0 < x < e : 0 < f(x) < f(e) \\ \forall e < x < \infty : f(e) > f(x) \end{array} \right\} \implies \forall 0 < x \neq e : f(x) < f(e)$$

f hat im Punkt $x = e$ ein striktes (globales) Maximum mit dem Wert $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$.

Da es überhaupt nur ein Extremum gibt, ist e das einzige Maximum der Funktion f .
q.e.d.

(b) **Behauptung:** Sei $a > 1, a \neq e$.

Dann besitzt die Gleichung $a^x = x^a$ genau eine von a verschiedene positive Lösung.

Beweis:

Es gilt für $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) &\iff x^{\frac{1}{x}} = a^{\frac{1}{a}} \iff \exp\left(\frac{1}{x} \ln(x)\right) = \exp\left(\frac{1}{a} \ln(a)\right) \stackrel{\text{exp}}{\iff} \frac{1}{x} \ln(x) = \\ &\frac{1}{a} \ln(a) \stackrel{a>0}{\iff_{x>0}} a \ln(x) = x \ln(a) \iff \exp(a \ln(x)) = \exp(x \ln(a)) \stackrel{\text{Def.}}{\iff} x^a = a^x. \end{aligned}$$

Nach Teil (a) ist $f|_{[0, e]}$ streng monoton wachsend, insbesondere also injektiv,

weshalb es höchstens ein $x \in (0, e]$ geben kann mit $f(x) = f(a)$.

Ebenso ist nach Teil (a) $f|_{[e, \infty)}$ streng monoton fallend, d.h. wieder injektiv, so daß es auch im Intervall $[e, \infty)$ höchstens ein x geben kann mit $f(x) = f(a)$.

Weil $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ kann man definieren: $f(0) := 0$ und erhält so eine stetige Fortsetzung der Funktion f in den Punkt 0. Sei also nun die Funktion f auf diese Weise stetig fortgesetzt. Dann folgt mit dem Hilfssatz aus Aufgabe 58(a) : $f|_{[0, e]}$ ist streng monoton wachsend, und dann:

Falls $1 < a < e$: $0 = f(0) < 1 = f(1) < f(a) < f(e) = e^{\frac{1}{e}}$, d.h. im Intervall $[0, e]$ gibt es neben a selbst keine weitere Lösung der Gleichung $f(x) = f(a)$.

Da aber $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ gibt es ein $\xi > e$ mit: $\forall x \geq \xi : |f(x) - 1| < f(a) - 1 \implies f(x) - 1 \leq |f(x) - 1| < f(a) - 1 \implies f(x) < f(a)$

Also gilt für festes $x_0 > \xi$ (z. B. $x_0 = 2\xi$) :

$e < x_0 \wedge f(x_0) < f(a) < f(e) \xrightarrow[f \text{ stetig}]{\text{Zwischenwertsatz}} \text{es gibt ein } x \in (e, x_0) : f(x) = f(a)$, und dieses x ist von a verschieden, da ja $a < e < x$.

Falls $a > e$: Im Intervall $[e, \infty)$ ist f streng monoton fallend, es kann also neben a selbst kein weiteres $x \in [e, \infty)$ geben mit $f(x) = f(a)$.

Im Intervall $[0, e]$ ist f streng monoton wachsend, d.h. dort kann es noch höchstens ein solches x mit $f(x) = f(a)$ geben. Tatsächlich:

$e < a \implies f(e) > f(a)$ (da f im Intervall $[e, \infty)$ monoton fällt)

$\implies f(0) = 0 < f(a) < f(e) \wedge 0 < e \wedge f$ stetig $\xrightarrow[\text{wertsatz}]{\text{Zwischen-}} \exists x \in (0, e) : f(x) = f(a)$,

und dieses x ist wieder verschieden von a , weil ja $0 < x < e < a$. Also gibt es auch in diesem Fall genau eine von a verschiedene Lösung der Gleichung $f(x) = f(a)$ q.e.d.

Insgesamt: Für jedes $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ gibt es genau ein $b \in \mathbb{R}$, $b \neq a$ mit $a^b = b^a$, und zwar:

$$\left. \begin{array}{l} \text{falls } 1 < a < e : b > e \\ \text{falls } a > e : b < e \end{array} \right\} \quad (\spadesuit)$$

- (c) **Behauptung:** Das einzige Paar $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ natürlicher Zahlen m, n mit $m < n$ und $m^n = n^m$ ist $(2, 4)$.

Beweis:

Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $m^n = n^m$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ und $m < n$.

Sei also $m^n = n^m$ für natürliche Zahlen m und n mit $m < n$.

Da nach (\spadesuit) für Lösungen der Gleichung $a^b = b^a$ gilt, daß $a < e \iff b > e$, d.h. eine der beiden Zahlen, o. E. a , immer $a < e < 3$ erfüllen muß, liefert $a \in \mathbb{N}$, daß $a = 1$ oder $a = 2$.

Falls $a = 1$: $b^1 = 1^a = 1 \implies a = 1 = b \nmid (a \neq b)$

Falls $a = 2$: $2^4 = 16 = 4^2$ erfüllt die Bedingungen, d.h. $b = 4$, und das ist die einzige Lösung nach Aufgabenteil (b) mit $a < b$. q.e.d.

60. Sei I ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit $f''(x) \geq 0 \quad (x \in I)$.

(a) **Behauptung:** Für alle $a, b, x \in I$ mit $a < x < b$ gilt:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

Beweis:

Nach Voraussetzung ist für alle $x \in I : f''(x) \geq 0 \xRightarrow{\text{Vorl.}} f'$ ist monoton wachsend auf I (da I ein Intervall ist).

$$\left. \begin{array}{l} a < x \xRightarrow[\text{Mittelwertsatz}]{\text{Mittelwertsatz}} \text{ es gibt ein } \xi \in (a, x) \text{ mit } \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi) \\ x < b \xRightarrow[\text{Mittelwertsatz}]{\text{Mittelwertsatz}} \text{ es gibt ein } \eta \in (x, b) \text{ mit } \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = f'(\eta) \end{array} \right\} \Rightarrow \xi < x < \eta \Rightarrow$$

$$\xRightarrow[\text{monoton wachsend}]{f'} f'(\xi) \leq f'(\eta) \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \quad \text{q.e.d.}$$

(b) **Behauptung:** f ist konvex, d.h.

$$\forall t \in [0, 1] \forall a, b \in I : f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b)$$

Beweis:

Falls $a = b : f(ta + (1 - t)b) = f(a) = t \cdot f(a) + (1 - t) \cdot f(a)$

Falls $a < b :$

falls $t = 0 : f(0 \cdot a + (1 - 0) \cdot b) = f(b) = 0 \cdot f(a) + (1 - 0) \cdot f(b)$

falls $t = 1 : f(1 \cdot a + (1 - 1) \cdot b) = f(a) = 1 \cdot f(a) + (1 - 1) \cdot f(b)$

Sei also im Folgenden stets $0 < t < 1$; dann:

$$a = ta + (1 - t)a \stackrel{1 \leq t \leq 0}{\underset{a < b}{\leq}} \underbrace{t \cdot a + (1 - t) \cdot b}_{:= \mu(t)} \leq tb + (1 - t)b = b$$

Weiter ist $\mu(t) = a \iff ta + (1 - t)b = a \iff (1 - t)b = (1 - t)a \stackrel{t \neq 1}{\iff} a = b$

und $\mu(t) = b \iff ta + (1 - t)b = b \iff ta = tb \stackrel{t \neq 0}{\iff} a = b$

Da aber $a < b$ ist also $b \neq \mu(t) \neq a$. Damit folgt mit Teil (a) :

$$a < \mu(t) < b \text{ und } b - \mu(t) = tb - ta = t(b - a) \text{ und } \mu(t) - a = (1 - t) \cdot (b - a) \implies$$

$$\begin{aligned} & \frac{f(\mu(t)) - f(a)}{\mu(t) - a} \leq \frac{f(b) - f(\mu(t))}{b - \mu(t)} \\ \iff & (b - \mu(t)) \cdot (f(\mu(t)) - f(a)) \leq (f(b) - f(\mu(t))) \cdot (\mu(t) - a) \\ \iff & t(b - a) \cdot (f(\mu(t)) - f(a)) \leq (1 - t)(b - a) (f(b) - f(\mu(t))) \\ \iff & t \cdot (f(\mu(t)) - f(a)) \leq (1 - t) \cdot (f(b) - f(\mu(t))) \\ \iff & t \cdot f(\mu(t)) + (1 - t) \cdot f(\mu(t)) \leq t \cdot f(a) + (1 - t) \cdot f(b) \\ \iff & f(\mu(t)) \leq tf(a) + (1 - t)f(b) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

(c) **Behauptung:** Für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ und $a_1, \dots, a_n \in I$ gilt:

$$f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) \leq \lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n)$$

Beweis: Mit Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:

Induktionsanfang: $n = 1$: $f(\lambda_1 a_1) \leq \lambda_1 f(a_1)$ wahr, da $\lambda_1 = 1$.

Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$:

Induktionsvoraussetzung: Die Aussage gilt für beliebige $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ und $a_1, \dots, a_n \in I$

Seien nun $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in [0, 1]$ mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1$ sowie $a_1, \dots, a_{n+1} \in I$.

Falls $\lambda_{n+1} = 1$ sind alle anderen $\lambda_i = 0$, und dann ist die Aussage mit Induktionsanfang wahr.

Sei also $\lambda_{n+1} \neq 1$. Dann gilt zunächst:

$$a_1, \dots, a_n \in I \wedge \lambda_i \in [0, 1] \ (1 \leq i \leq n) \wedge \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \implies \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \in I$$

Ist nämlich $a_* = \min\{a_1, \dots, a_n\} \in I \wedge a^* = \max\{a_1, \dots, a_n\} \in I$, so folgt:

$$a_* = 1 \cdot a_* = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) a_* = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_* \stackrel{a_* \leq a_i}{\leq} \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \stackrel{a_i \leq a^*}{\leq} \sum_{i=1}^n \lambda_i a^* = a^*$$

und da ein Intervall mit zwei Punkten auch alle dazwischen liegenden Punkte enthält,

folgt mit $a_* \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \leq a^*$, daß auch $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \in I$ q.e.d.

Damit:

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} a_{n+1}) &= f\left(\frac{1 - \lambda_{n+1}}{1 - \lambda_{n+1}} \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i + \lambda_{n+1} a_{n+1}\right) \\ &= f\left((1 - \lambda_{n+1}) \cdot \left[\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} a_i\right] + \lambda_{n+1} a_{n+1}\right) \\ &\stackrel{(b)}{\leq} (1 - \lambda_{n+1}) \cdot f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} a_i\right) + \lambda_{n+1} f(a_{n+1}) \end{aligned}$$

Ferner:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i + \lambda_{n+1} = 1 &\implies \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 - \lambda_{n+1} \implies \forall 1 \leq i \leq n : \lambda_i \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 - \lambda_{n+1} \implies \\ \stackrel{\lambda_{n+1} < 1}{\lambda_i \geq 0} 0 &\leq \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} \leq 1, \text{ d.h. } \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} \in [0, 1] \end{aligned}$$

und

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i - \lambda_{n+1}}{1 - \lambda_{n+1}} = \frac{1 - \lambda_{n+1}}{1 - \lambda_{n+1}} = 1$$

Damit aber liefert die Induktionsvoraussetzung, angewandt auf $\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}}, \dots, \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}}$ und a_1, \dots, a_n :

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} a_{n+1}) &\stackrel{\text{s.o.}}{\leq} (1 - \lambda_{n+1}) \cdot f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} a_i\right) + \lambda_{n+1} f(a_{n+1}) \\ &\stackrel{\text{IV}}{\leq} \cancel{(1 - \lambda_{n+1})} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\cancel{1 - \lambda_{n+1}}} f(a_i) + \lambda_{n+1} f(a_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(a_i) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

(d) **Behauptung:** Für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ und $a_1, \dots, a_n \in I$ gilt:

$$a_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot a_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$$

Beweis:

Die Funktion $f(x) := -\ln(x)$ ist zweimal stetig differenzierbar im Intervall $I = (0, \infty)$ mit Ableitung $f'(x) = -\frac{1}{x}$ und zweiter Ableitung $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ für alle $x > 0$.

Dann folgt für alle $a_i > 0$, $\lambda_i \in [0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$: $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i)$ nach Teil (c).

Dabei ist $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i > 0$, da $0 < a_* = \min\{a_1, \dots, a_n\} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$

wie oben, und damit folgt mit $f = -\ln$:

$$\begin{aligned} -\ln\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i (-\ln(a_i)) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i \ln(a_i) \implies \\ \implies \ln\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) &\geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \ln(a_i) \implies \\ \stackrel{\substack{\text{exp ist} \\ \text{wachsend}}}{\implies} \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i &= \exp\left(\ln\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right)\right) \geq \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \ln(a_i)\right) \stackrel{\substack{\text{Funktional-} \\ \text{gleichung}}}{=} \\ &= \prod_{i=1}^n \exp(\lambda_i \ln(a_i)) \stackrel{\text{Def.}}{=} \prod_{i=1}^n a_i^{\lambda_i} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$