

Lösungsvorschläge zu Analysis I für Informatiker

Blatt 4

16. (4 Punkte)

Wir verwenden (mit  $n \in \mathbb{N}_0$ ):

$$q \neq 1 \implies \sum_{j=0}^{n-1} q^j = \frac{1-q^n}{1-q} \quad (*)$$

$$s_1(n) = \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n(n+1) \quad (**)$$

a) Behauptung:  $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n i 2^j = \frac{1}{2}n(n+1)(2^{n+1} - 1)$

Denn:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n i 2^j &= \sum_{i=0}^n \left( \sum_{j=0}^n i 2^j \right) \\ &= \sum_{i=0}^n i \cdot \underbrace{\left( \sum_{j=0}^n 2^j \right)}_{:=c} \quad (\text{da } i \text{ unabhängig von } j; \text{Distributivgesetz}) \\ &= \left( \sum_{j=0}^n 2^j \right) \left( \sum_{i=0}^n i \right) \quad (\text{da } c \text{ unabhängig von } i; \text{Distributivgesetz}) \\ &= \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \quad ((* \text{ und } (**)) \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)(2^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

b) Behauptung:  $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (3^i + 4^j) = \frac{1}{6}(2 \cdot 4^{n+1} + 3^{n+2} - 5)$

Denn:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (3^i + 4^j) &\stackrel{(1.3)(10)}{=} \sum_{i=0}^n \left[ \sum_{j=0}^n 3^i + \sum_{j=0}^n 4^j \right] \\ &\stackrel[\text{distrib.}]{(*)}{=} \sum_{i=0}^n \left[ 3^i \cdot \sum_{j=0}^n 1 + \frac{1-4^{n+1}}{1-4} \right] \\ &= \sum_{i=0}^n \left[ (n+1)3^i + \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(1.3)(7)}{=} \sum_{i=0}^n (n+1)3^i + \sum_{i=0}^n \underbrace{\frac{1}{3}(4^{n+1}-1)}_{\text{unabh. von } i} \\
& \stackrel{\text{Distr.}}{=} (n+1) \cdot \sum_{i=0}^n 3^i + \frac{1}{3}(4^{n+1}-1) \cdot \sum_{i=0}^n 1 \\
& \stackrel{(*)}{=} (n+1) \cdot \frac{1-3^{n+1}}{1-3} + \frac{1}{3}(4^{n+1}-1)(n+1) \\
& = (n+1) \left( \frac{1}{2}3^{n+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}4^{n+1} - \frac{1}{3} \right) \\
& = \frac{1}{6}(n+1)(2 \cdot 4^{n+1} + 3 \cdot 3^{n+1} - 5) \\
& = \frac{1}{6}(n+1)(2 \cdot 4^{n+1} + 3^{n+2} - 5)
\end{aligned}$$

c) Behauptung: Für  $q \in \mathbb{R}$ ,  $q \neq 1$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\sum_{i=1}^n i q^i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i q^i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n q^i = \frac{nq^{n+2} - (n+1)q^{n+1} + q}{(q-1)^2}$$

Beweis:

Zunächst ist für alle  $i \in \mathbb{N}$ :  $i \cdot q^i = \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{i \text{ mal}} \cdot q^i = \left( \sum_{j=1}^i 1 \right) q^i \stackrel{\text{distr.}}{=} \sum_{j=1}^i q^i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n i q^i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^i q^i \right)$$

$$\text{Weiter ist } \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^i q^i \right) = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} q^i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n q^i$$

denn die mittlere Summe läuft über alle Zahlenpaare  $(i, j)$  mit  $i$  und  $j$  zwischen 1 und  $n$ , wobei immer  $j \leq i$  erfüllt sein muß. Hält man dabei zunächst  $i$  fest ( $1 \leq i \leq n$ ) und durchläuft für diese  $i$  das zugehörige  $j$  von 1 bis  $i$ , so erhält man die linke Summe; hält man dagegen zunächst  $j$  fest und durchläuft zu diesem  $j$  das zugehörige  $i$  von  $j$  bis  $n$ , so bekommt man die rechte Summe. In beiden Fällen werden jeweils alle in Frage kommenden Zahlenpaare  $(i, j)$  genau einmal durchlaufen, in anderer Reihenfolge. Das aber ist aufgrund des Kommutativgesetzes irrelevant. Nun gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=j}^n q^i &= \sum_{i=0}^{j-1} q^i + \sum_{i=j}^n q^i - \sum_{i=0}^{j-1} q^i \stackrel{(1.3)(7)}{=} \sum_{i=0}^n q^i - \sum_{i=0}^{j-1} q^i \stackrel{(*)}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - \frac{1-q^j}{1-q} = \\
&= \frac{q^j - q^{n+1}}{1-q} \quad (*** )
\end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=j}^n q^i \right) &= \sum_{j=1}^i \frac{q^j - q^{n+1}}{1-q} \stackrel{\text{distr.}}{\underset{(1.3)(7)}}{=} \frac{1}{1-q} \left( \sum_{j=1}^n q^j - \sum_{j=1}^n q^{n+1} \right) \\
&\stackrel{\text{distr.}}{=} \frac{1}{1-q} \left( \underbrace{\sum_{j=1}^n q^j}_{=\sum_{j=0}^n q^j} + 1 - 1 - q^{n+1} \cdot \sum_{j=1}^n 1 \right) \\
&= \frac{1}{1-q} \left( \sum_{j=0}^n q^j - 1 - nq^{n+1} \right) \\
&\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{1-q} \left( \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - 1 - nq^{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1-q^{n+1} - (1-q) - nq^{n+1}(1-q)}{1-q} \\
&= \frac{1}{(1-q)^2} (q - q^{n+1} - nq^{n+1} + nq^{n+2}) \\
&= \frac{1}{(1-q)^2} (nq^{n+2} - (n+1)q^{n+1} + q) \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

17. (4 Punkte)

Hier ist für  $a, b \in \mathbb{R}$  zu zeigen: 
$$\begin{cases} (a) & \min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|) \\ (b) & \min(a, b) \leq \frac{1}{2}(a + b) \leq \max(a, b) \\ (c) & \max(-a, -b) = -\min(a, b) \end{cases}$$

Wir verwenden die Definitionen:

$$\max(a, b) = \begin{cases} a & \text{für } a \geq b \\ b & \text{für } a < b \end{cases} \quad \text{und} \quad \min(a, b) = \begin{cases} b & \text{für } a \geq b \\ a & \text{für } a < b \end{cases} \quad \text{und} \quad |a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

sowie die einschlägigen Rechenregeln für die Anordnung wie  $(x, y, a \in \mathbb{R})$ :

$$x > y \wedge a > 0 \implies ax > ay$$

$$x \geq y \wedge a \geq 0 \implies ax \geq ay$$

$$x > y \wedge a < 0 \implies ax < ay$$

$$x \geq y \wedge a \leq 0 \implies ax \leq ay$$

$$x > y \wedge a \in \mathbb{R} \implies a + x > a + y$$

$$x \geq y \wedge a \in \mathbb{R} \implies a + x \geq a + y \quad \text{usw.}$$

Gemäß der sogenannten Trichotomie, nach der für jede reelle Zahl  $a$  genau eine der Bedingungen  $a > 0 \quad \vee \quad a = 0 \quad \vee \quad -a > 0$  gilt, machen wir hier eine Fallunterscheidung nach  $a - b \geq 0 \quad \vee \quad a - b < 0$ , da es hier ja nur um die relative Lage von  $a$  und  $b$  geht (siehe Definition  $|\cdot|, \max$  und  $\min$ ).

Also:

1.Fall:  $a - b \geq 0 \iff a \geq b \iff -a \leq -b \iff -b \geq -a$  (mit obigen Rechenregeln)

Dann gilt nach obigen Definitionen: 
$$\left\{ \begin{array}{lcl} \max(a, b) & = & a \\ \min(a, b) & = & b \\ \max(-a, -b) & = & -b \\ |a - b| & = & a - b \end{array} \right\}$$

also

in a) :  $\frac{1}{2}(a + b - |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b - (a - b)) = \frac{1}{2} \cdot 2b = b \stackrel{\text{s.o.}}{=} \min(a, b)$

in b) :  $\min(a, b) = b = \frac{1}{2}(b + b) \underset{\text{da } b \leq a}{=} \frac{1}{2}(a + b) \underset{\text{da } b \leq a}{\leq} \frac{1}{2}(a + a) = a = \max(a, b)$

$\implies \min(a, b) \leq \frac{1}{2}(a + b) \leq \max(a, b)$

in c) :  $\max(-a, -b) \stackrel{\text{s.o.}}{=} -b = -\min(a, b)$

2.Fall:  $a - b < 0 \iff a < b \iff -a > -b \iff -b < -a$

Wieder mit den Definitionen: 
$$\left\{ \begin{array}{lcl} \max(a, b) & = & b \\ \min(a, b) & = & a \\ \max(-a, -b) & = & -a \\ |a - b| & = & -(a - b) = b - a \end{array} \right\}$$

also

in a) :  $\frac{1}{2}(a + b - |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b - (b - a)) = \frac{1}{2} \cdot 2a = a \stackrel{\text{s.o.}}{=} \min(a, b)$

in b) :  $\min(a, b) = a = \frac{1}{2}(a + a) \underset{\text{da } a < b}{<} \frac{1}{2}(a + b) \underset{\text{da } a < b}{<} = \frac{1}{2}(b + b) = b = \max(a, b)$

$\implies \min(a, b) \leq \frac{1}{2}(a + b) \leq \max(a, b)$

in c) :  $\max(-a, -b) \stackrel{\text{s.o.}}{=} -a = -\min(a, b)$

q.e.d.

18. (2 + 2 Punkte)

a) Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $a_k \in \mathbb{R}$  mit  $-1 \leq a_k \leq 0$  für alle  $1 \leq k \leq n$  ist mit vollständiger Induktion zu zeigen:

$$\prod_{k=1}^n (1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n a_k$$

Also ist zu zeigen:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left[ \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} : -1 \leq a_k \leq 0 \text{ für alle } 1 \leq k \leq n \implies \prod_{k=1}^n (1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n a_k \right]$$

Induktionsanfang:  $n = 1$

Sei  $-1 \leq a_k \leq 0$  für alle  $1 \leq k \leq 1$  d.h.  $n = k = 1$ . Dann folgt

$$\prod_{k=1}^1 (1 + a_1) = 1 + a_1 = 1 + \sum_{k=1}^1 a_k \geq 1 + \sum_{k=1}^1 a_k$$

Induktionsschritt  $n \mapsto n + 1$  :

Induktionsvoraussetzung: Für ein  $n \in \mathbb{N}$  gelte:

$\forall b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$  : Ist  $-1 \leq b_k \leq 0$  für  $1 \leq k \leq n$ , so folgt :  $\prod_{k=1}^n (1+b_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n b_k$

Seien nun  $a_1, \dots, a_n, a_{n+1} \in \mathbb{R}$  mit  $-1 \leq a_k \leq 0$  für alle  $1 \leq k \leq n+1$ .

Zu zeigen ist:  $\prod_{k=1}^{n+1} (1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k$ .

Da nun  $a_1, \dots, a_n$  die Bedingung  $-1 \leq a_k \leq 0$  erfüllen, liefert die Induktionsvoraussetzung:

$$\prod_{k=1}^n (1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n a_k \quad (*)$$

Nun ist  $a_{n+1} \geq -1 \implies 1 + a_{n+1} \geq 0$  ; nach einer Rechenregel der Vorlesung darf man also die Gleichung (\*) mit  $1 + a_{n+1}$  durchmultiplizieren und man erhält:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} (1 + a_k) &= (1 + a_{n+1}) \cdot \prod_{k=1}^n (1 + a_k) \geq (1 + a_{n+1}) \left( 1 + \sum_{k=1}^n a_k \right) \\ &\stackrel{\text{distr.}}{=} 1 + \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1} + a_{n+1} \cdot \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k + \underbrace{a_{n+1}}_{\leq 0} \cdot \underbrace{\left( \sum_{k=1}^n a_k \right)}_{\leq 0} \\ &\stackrel{(**)}{\geq} 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k + 0 \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k \end{aligned}$$

denn nach Vorlesung gilt:  $\left\{ \begin{array}{l} x \leq 0 \wedge y \leq 0 \implies xy \geq 0 \\ x < 0 \wedge y < 0 \implies xy > 0 \end{array} \right\} \quad (**)$

- b) Hier ist für  $n = 2$  ein Beispiel dafür zu finden, daß die Ungleichung aus a) verletzt ist, wenn man lediglich  $a_1 \geq -1$  und  $a_2 \geq -1$  voraussetzt.

Nun gilt aber nach (\*\*) in a):  $a_1 > 0$  und  $a_2 < 0 \implies a_1 a_2 < 0$ .

Wählt man also  $0 < a_1$  und  $-1 \leq a_2 < 0$ , so folgt:

$$\prod_{k=1}^2 (1 + a_k) = (1 + a_1)(1 + a_2) = 1 + a_1 + a_2 + a_1 a_2 < 1 + a_1 + a_2 = 1 + \sum_{k=1}^2 a_k.$$

Ein konkretes Beispiel ist  $\frac{1}{2} =: a_1$  und  $-\frac{1}{2} =: a_2$ .

19. (4 Punkte) Es ist die Pascalsche Identität zu zeigen:

$$s_k(n) = \frac{1}{k+1} \left( (n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} s_j(n) \right) \quad (k \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N})$$

wobei  $s_k(n) = \sum_{i=1}^n i^k$  wie in der Vorlesung definiert.

Dabei war zu verwenden:  $\sum_{i=1}^n ((i+1)^{k+1} - i^{k+1}) = (n+1)^{k+1} - 1$ .

Beweisen wir zunächst den Hinweis:

Für beliebig gewählte  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) = x_{n+1} - x_1 \quad (\text{teleskopische Summe})$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) &\stackrel{(1.3)(7)}{=} \sum_{i=1}^n x_{i+1} - \sum_{i=1}^n x_i \\ &= \sum_{i+1=2}^{n+1} x_{i+1} - \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{da } 1 \leq i \leq n \iff 2 \leq i+1 \leq n+1) \\ &\stackrel{l:=i+1}{=} \sum_{l=2}^{n+1} x_l - \sum_{i=1}^n x_i \\ &= \left( \sum_{l=2}^n x_l + x_{n+1} \right) - \left( x_1 + \sum_{i=2}^n x_i \right) \\ &= x_{n+1} - x_1 \end{aligned}$$

Damit aber folgt der Hinweis:

Setze  $x_i := i^k$ ,  $1 \leq i \leq n \implies$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n ((i+1)^{k+1} - i^{k+1}) &= \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) \\ &= x_{n+1} - x_1 \\ &= (n+1)^{k+1} - 1^{k+1} \\ &= (n+1)^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

Zum Beweis der Pascalschen Identität:

Nach dem Binomischen Lehrsatz ist  $\forall k \in \mathbb{N}_0 : (i+1)^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} i^j \implies$

$$\begin{aligned}
(n+1)^{k+1} - 1 &\stackrel{\text{Hinweis}}{=} \sum_{i=1}^n \left( (i+1)^{k+1} - i^{k+1} \right) \\
&\stackrel{(1.3)(7)}{=} \sum_{i=1}^n (i+1)^{k+1} - \sum_{i=1}^n i^{k+1} \\
&\stackrel{\text{Binomi Def.}}{=} \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} i^j \right] - s_{k+1}(n) \\
&\stackrel{(1.3)(8)}{=} \sum_{j=0}^{k+1} \underbrace{\sum_{i=1}^n \binom{k+1}{j} i^j}_{\text{unabh. von } i} - s_{k+1}(n) \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \left[ \binom{k+1}{j} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n i^j}_{=s_j(n)} \right] - s_{k+1}(n) \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} s_j(n) - s_{k+1}(n)
\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}
(n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} s_j(n) &= \\
&\stackrel{\text{s.o.}}{=} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} s_j(n) - s_{k+1}(n) - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} s_j(n) \\
&\stackrel{(1.3)(1)}{=} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} s_j(n) + \underbrace{\binom{k+1}{k} s_k(n)}_{=k+1} + \underbrace{\binom{k+1}{k+1} s_{k+1}(n)}_{=1} - s_{k+1}(n) - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} s_j(n) \\
&\stackrel{\text{kürzen}}{=} (k+1) \cdot s_k(n)
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung:

$$\frac{1}{k+1} \left( (n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} s_j(n) \right) = s_k(n) \quad \text{q.e.d.}$$

20. a) Zu zeigen ist für die Multinomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_l} = \frac{n!}{k_1! \dots k_l!} = \binom{n}{k_1} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} \dots \binom{n-k_1-\dots-k_{l-2}}{k_{l-1}}$$

(siehe Aufgabe 10)) mit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $l \geq 2$ ,  $k_1, \dots, k_l \in \mathbb{N}_0$  und  $k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$  die Behauptung:

Der Multinomialkoeffizient  $\binom{n}{k_1, \dots, k_l} = \frac{n!}{k_1! \dots k_l!}$  gibt an, wieviele  $n$ -Tupel aus  $l$  paarweise verschiedenen Elementen  $x_1, x_2, \dots, x_l$  gebildet werden können, wenn jedes  $x_i$  genau  $k_i$ -fach in dem  $n$ -Tupel auftreten soll.

Sei  $M$  diese Anzahl.

Das Element  $x_1$  soll gerade  $k_1$ -fach im  $n$ -Tupel  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  vorkommen (mit  $y_i \in \{x_1, \dots, x_l\}$ ). Das kann an  $k_1$  verschiedenen Stellen  $\{j_1, \dots, j_{k_1}\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$  geschehen; jede dieser Belegungen entspricht einer Verteilung von  $x_1$  an  $k_1$  verschiedene Positionen, und dies entspricht den Möglichkeiten, Teilmengen vom Umfang  $k_1$  in  $\{1, 2, \dots, n\}$  zu bilden - diese enthalten dann die Stellen, an die die  $x_1$  verteilt werden sollen. Nach Vorlesung 0.14 c) gibt es  $\binom{n}{k_1}$  solche Teilmengen in  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Nun ist das Element  $x_1$  auf  $k_1$  Positionen verteilt, und es bleiben  $n - k_1$  Positionen übrig. Zu jeder dieser Verteilungen wird nun nach demselben Verfahren das Element  $x_2$  auf die  $n - k_1$  restlichen Positionen verteilt, und zwar  $k_2$ -mal. Analog obiger Ausführung gibt es dafür  $\binom{n-k_1}{k_2}$  Möglichkeiten. Führt man so fort, so hat das Element  $x_i$ , das  $k_i$ -mal auftreten soll, noch  $n - k_1 - \dots - k_{i-1}$  freie Plätze, d.h. es gibt  $\binom{n-k_1-\dots-k_{i-1}}{k_i}$  Verteilungen dafür, insgesamt also

$$M = \binom{n}{k_1} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} \dots \binom{n-k_1-\dots-k_{l-2}}{k_{l-1}} \text{ Möglichkeiten.}$$

Alternativ:

Man stelle sich vor, das Element  $x_i$ , das im  $n$ -Tupel  $(y_1, \dots, y_n)$  (wobei jeweils  $y_j \in \{x_1, x_2, \dots, x_l\}$ )  $k_i$ -fach vorkommen soll, wäre tatsächlich  $k_i$ -fach vorhanden, und zwar unterscheidbar:  $x_i^{(1)} = x_i^{(2)} = \dots = x_i^{(k_i)} = x_i$  ( $1 \leq i \leq l$ ). Dann enthält  $A = \{x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(k_1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(k_2)}, \dots, x_l^{(1)}, \dots, x_l^{(k_l)}\}$  gerade  $k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$  Elemente. Nun werden aus den Elementen von  $A$   $n$ -Tupel gebildet. Davon gibt es nach Vorlesung 0.14 b) gerade  $n!$  Stück. In jedem dieser  $n$ -Tupel tritt das Element  $x_i$  in der Gestalt der  $x_i^{(j)}$  ( $1 \leq j \leq k_i$ )  $k_i$ -mal auf, aber de facto ununterscheidbar. Sind die Stellen des Auftretens  $j_1, \dots, j_{k_i} \in \{1, 2, \dots, n\}$ , so können die Elemente  $x_i^{(j)}$  auf diesen Positionen permutieren, und jede dieser Permutationen liefert wegen der Ununterscheidbarkeit dasselbe Ergebnis; wieder nach Satz 0.14 b) gibt es  $k_i!$  solche Permutationen. Damit gilt, daß jede der Belegungen  $k_1!k_2!\dots k_l!$  verschiedene Realisierungen, d.h. ununterscheidbare Verteilungen der Objekte  $x_1, \dots, x_l$  auf ihre jeweiligen Positionen besitzt, und damit werden alle  $n$ -Tupel der gewünschten Art erhalten. Also ist  $M \cdot k_1!k_2!\dots k_l! = n! \implies M = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_l!}$ .



b) Zu zeigen ist für  $l, n \in \mathbb{N}$  und  $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{R}$ :

$$\left( \sum_{i=1}^l x_i \right)^n = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_l = n, \\ k_1, \dots, k_l \in \mathbb{N}_0}} \binom{n}{k_1, \dots, k_l} x_1^{k_1} \dots x_l^{k_l}$$

Durch Ausmultiplizieren des  $n$ -fachen Produkts  $\left( \sum_{i=1}^l x_i \right)^n$  erhält man  $l^n$  Summanden der Gestalt  $z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n$ , wobei  $z_i \in \{x_1, \dots, x_l\}$ . Zu jedem dieser  $n$ -Tupel gibt es auch einen Summanden (wobei man die Reihenfolge der Faktoren  $z_i$  in den Produkten unverändert läßt, also gleiche Terme nicht zusammenfaßt). Nun sammelt man die gleichen Faktoren, ordnet sie in der Form  $\xi = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_l^{k_l}$ , und zählt, wie oft zu festen  $k_i, 1 \leq i \leq l$ , das Produkt  $\xi$  auftritt, wobei eben die Faktoren  $x_i$  jeweils  $k_i$ -fach verteilt im  $n$ -Tupel  $(z_1, \dots, z_n)$  auftreten und jede dieser Verteilungen dasselbe Produkt  $\xi$  liefert. Natürlich ist dabei  $k_1 + \dots + k_l = n$ , da jeder Summand  $n$  Faktoren besitzt. Nun gibt es nach Aufgabenteil a) gerade  $\binom{n}{k_1, \dots, k_l}$  Möglichkeiten, ein solches Produkt zu bilden - jede dieser Möglichkeiten tritt als Summand auf, d.h. zu jedem  $(k_1, k_2, \dots, k_l) \in \{0, 1, \dots, n\}^l$  mit  $k_1 + \dots + k_l = n$  tritt das Produkt  $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_l^{k_l}$  gerade  $\binom{n}{k_1, \dots, k_l}$  mal auf. Also folgt die Behauptung des Multinomialgesetzes.

c) Für  $n = 2$ :

$l \in \mathbb{N}$  ist beliebig, d.h. die Bedingung  $k_1 + \dots + k_l = 2$  erzwingt für  $k_i \geq 0$ , daß alle  $k_i \in \{0, 1, 2\}$  liegen. Es gibt also die Fälle:

- Ein  $k_i = 2 \implies k_j = 0$  für alle  $1 \leq j \leq l, j \neq i$ . Also ist

$$\binom{2}{0, \dots, k_i, \dots, 0} = \frac{2!}{0! \dots 2! \dots 0!} = 1$$

- Für genau 2 der  $k_\mu$  gilt  $k_i = 1 = k_j, i \neq j$ , alle anderen  $k_m = 0$ . Dann ist

$$\binom{2}{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0} = \frac{2!}{0! \dots 0! \cdot 1! \cdot 0! \dots 0! \cdot 1! \cdot 0! \dots 0!} = 2$$

Damit lautet der Multinomialgesetz

$$\left( \sum_{i=1}^l x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^l x_i^2 + 2 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq l} x_i x_j = \sum_{i=1}^l x_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^l \sum_{j=i+1}^l x_i x_j$$

Man beachte, daß die Faktoren im Multinomialgesetz nach Indizes geordnet auftreten, d.h. im Produkt  $x_1$  vor  $x_2$ ,  $x_2$  vor  $x_3$  usw. steht.

Für  $n=3$ :

Wieder ist  $l \in \mathbb{N}$  beliebig, also  $k_1 + \dots + k_l = 3$  erfordert  $0 \leq k_i \leq 3$  für alle  $1 \leq i \leq l$ . Es gibt also die Fälle:

- Ein  $k_i = 3 \implies k_j = 0$  für alle  $1 \leq j \leq l, j \neq i$ . Also ist

$$\binom{3}{0, \dots, k_i, \dots, 0} = \frac{3!}{0! \dots 3! \dots 0!} = 1$$

- Ein  $k_i = 2$ , ein weiteres  $k_j = 1$  mit  $i \neq j$ . Alle anderen  $k_m = 0$ . Also ist

$$\binom{3}{0 \dots 0, 1, \dots 0, 2, 0, \dots 0} = \binom{3}{0 \dots 0, 2, \dots 0, 1, 0, \dots 0} = \frac{3!}{(0!)^{l-2} \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{6}{2} = 3$$

- Kein  $k_i \geq 2$ , d.h. alle  $k_i \leq 1$ . Damit gibt es wegen  $\sum_{i=1}^l k_i = 3$  genau 3 Indizes  $1 \leq i < j < m \leq l$ , so daß  $k_i = k_j = k_m = 1$ , alle anderen  $k_\mu = 0$ . Also ist

$$\binom{3}{0, \dots, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots 1, 0, \dots 0} = \frac{3!}{(0!)^{l-3} \cdot 1!^3} = 6$$

Damit lautet der Multinomialssatz für  $n = 3$ :

$$\left( \sum_{i=1}^l x_i \right)^3 = \sum_{i=1}^l x_i^3 + 3 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq l} x_i^2 x_j + 3 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq l} x_i x_j^2 + 6 \cdot \sum_{1 \leq i < j < m \leq l} x_i x_j x_m$$

Falls  $l = 2$  ist die letzte Summe leer, d.h. liefert den Wert 0.