

## Analysis für Informatiker und Statistiker

### Aufgabe 21 (4 Punkte)

- (a) Seien  $q, r \in \mathbb{R}$ ,  $q \neq 1$  und die Folge reeller Zahlen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  rekursiv definiert durch  $a_0 \in \mathbb{R}$  und  $a_{n+1} = qa_n + r$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ). Zeigen Sie:

$$a_n = q^n a_0 + \frac{q^n - 1}{q - 1} r \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

- (b) Seien  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  Folgen reeller Zahlen und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  rekursiv definiert durch  $a_0 \in \mathbb{R}$  und  $a_{n+1} = q_n a_n + r_n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ). Zeigen Sie:

$$a_n = \left( \prod_{i=0}^{n-1} q_i \right) a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left( \prod_{i=k+1}^{n-1} q_i \right) r_k \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

- (c) Folgern Sie (a) direkt aus (b).

### Aufgabe 22 (4 Punkte)

Sei  $p$  eine Primzahl. Zeigen Sie den kleinen Satz von Fermat durch vollständige Induktion:

$$n^p - n \text{ ist durch } p \text{ teilbar} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(Hinweis: Binomischer Satz; Teilbarkeit von  $\binom{p}{k}$  durch  $p$  für  $k = 1, \dots, p-1$ .)

### Aufgabe 23 (4 Punkte)

Seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitzstetige Funktionen auf dem Intervall  $I$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie die Lipschitzstetigkeit für folgende Funktionen:

- (a)  $\lambda f(x)$  ( $x \in I$ ),
- (b)  $f(x) + g(x)$  ( $x \in I$ ),
- (c)  $f(x) \cdot g(x)$  ( $x \in J$ ), falls  $J$  beschränktes Teilintervall von  $I$ ,
- (d)  $g \circ f$ , falls  $f(I) \subset I$ .

*Bitte wenden!*

**Aufgabe 24** (4 Punkte)

Zeigen Sie schrittweise die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n} (a_1 + \dots + a_n) \quad (a_1 \geq 0, \dots, a_n \geq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2),$$

worin Gleichheit genau dann eintritt, wenn  $a_1 = \dots = a_n$ .

- (a) Beweisen Sie zunächst die Ungleichung für  $n = 2$ .
- (b) Zeigen Sie unter Verwendung von (a), dass die Ungleichung für  $2n$  gilt, wenn sie für  $n$  gilt.
- (c) Zeigen Sie, dass die Ungleichung für  $n - 1$  gilt, wenn sie für  $n$  gilt und  $n \geq 3$  vorliegt.  
(Hinweis: Wählen Sie  $a_n = \frac{1}{n-1}(a_1 + \dots + a_{n-1})$ , sofern mindestens ein  $a_i > 0$ .)

**Aufgabe 25\***

Zeigen Sie mit der Methode des Koeffizientenvergleichs folgende Beziehungen:

$$(a) \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad (k, n \in \mathbb{N}_0, 1 \leq k \leq n)$$

$$(\text{Hinweis: } (1+x) \cdot (1+x)^n = (1+x)^{n+1})$$

$$(b) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$(\text{Hinweis: } (1+x)^n \cdot (1+x)^n = (1+x)^{2n})$$

$$(c) \quad \sum_{k=0}^p \binom{m}{p-k} \binom{n}{k} = \binom{m+n}{p} \quad (m, n, p \in \mathbb{N}_0, p \leq m, p \leq n)$$

**Abgabe einzeln oder zu zweit:** Montag, 3.12.2007 bis 16<sup>15</sup> Uhr,  
Übungskasten vor der Bibliothek im 1. Stock

---

\*Diese Zusatzaufgabe soll weitere Anwendungsmöglichkeiten des Vorlesungsstoffes aufzeigen. Sie wird aber nicht korrigiert und ist auch nicht prüfungsrelevant.