

Lösungen zu den Übungen zur Analysis I für Informatiker

Blatt 1

1. (4 Punkte)

Wir führen als neues Symbol ein: "entweder A oder B " $\Longleftrightarrow: A \dot{\vee} B$
Wahrheitstafel dafür:

A	B	$A \dot{\vee} B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Behauptung: $A \dot{\vee} B = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$.

Die folgende Wahrheitstafel zeigt diese Identität:

A	B	$A \wedge \neg B$	$\neg A \wedge B$	$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
w	w	f	f	f
w	f	w	f	w
f	w	f	w	w
f	f	f	f	f

Dies ist auch erkennbar an der Wahrheitstafel für die Äquivalenz zweier Aussagen:

A	B	$A \Longleftrightarrow B$	$\neg(A \Longleftrightarrow B)$
w	w	w	f
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	w	f

Wie man sieht, stimmen die Belegungen für die Aussagen $A \dot{\vee} B$ und $\neg(A \Longleftrightarrow B)$ überein. Also kann man sagen:

$[A \dot{\vee} B] \Longleftrightarrow [\neg(A \Longleftrightarrow B)] \Longleftrightarrow [\neg((A \longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A))] \Longleftrightarrow$
 $\Longleftrightarrow [\neg(A \longrightarrow B) \vee \neg(B \Longrightarrow A)] \Longleftrightarrow [(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)]$
 ist allgemeingültig. (Mit Aufgabe 2) a), Teil i))

2. (1+1+1+1 Punkte)

(a) i. Behauptung: $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

Wahrheitstafel:

A	B	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
w	w	f	w	f	f	w
w	f	w	f	w	w	w
f	w	f	w	f	f	w
f	f	w	w	f	f	w

ii. Behauptung: $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ (modus ponens)

	A	B	$A \Rightarrow B$	$A \wedge (A \Rightarrow B)$	$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$
	w	w	w	w	w
	w	f	f	f	w
	f	w	w	f	w
	f	f	w	f	w

Oder alternativ unter Benutzung der Tautologie (*) $\neg(A \wedge B) \iff (\neg A \vee \neg B)$:

$$\begin{aligned}
 & A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B \\
 \iff & \neg(A \wedge (A \Rightarrow B)) \vee B && ((*) \text{ und Aufgabe 2a)i) } \\
 \iff & \neg(A \wedge \neg(A \wedge \neg B)) \vee B && (\text{wegen Aufgabe 2 a) Teil i}) \\
 \stackrel{[*]}{\iff} & (\neg A \vee (A \wedge \neg B)) \vee B \\
 \iff & ((\underbrace{\neg A \vee A}_{\text{"wahr"}}) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \vee B && (\text{wegen Distributivgesetz f\"ur Aussagen}) \\
 \iff & \neg A \vee \underbrace{\neg B \vee B}_{\text{"wahr"}} && (\text{weil "wahr"} \wedge C \iff C) \\
 \iff & \neg A \vee \text{"wahr"} \\
 \iff & \text{"wahr"}
 \end{aligned}$$

(b) Ist die Aussage $(B \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow A$ allgemeing\"ultig?

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \wedge (A \Rightarrow B)$	$(B \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow A$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	f
f	f	w	f	w

Folglich nicht allgemeing\"ultig.

Oder wieder alternativ mit der Tautologie (*):

$$\begin{aligned}
 & B \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \\
 \iff & \neg(B \wedge (A \Rightarrow B)) \vee A && (\text{Aufgabe 2 a) Teil i) } \\
 \stackrel{[*]}{\iff} & [\neg B \vee (A \wedge \neg B)] \vee A \\
 \iff & [(\neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee \neg B)] \vee A && (\text{Distributivgesetz f\"ur Aussagen}) \\
 \iff & [(\neg B \vee A) \wedge \neg B] \vee A \\
 \iff & (\neg B \vee A \vee A) \wedge (\neg B \vee A) && (\text{Distributivgesetz f\"ur Aussagen}) \\
 \iff & (\neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee A) \\
 \iff & \neg B \vee A \\
 \iff & (B \Rightarrow A)
 \end{aligned}$$

und das ist nat\"urlich nicht immer wahr: w\"ahle B wahr, A falsch.

3. (1+1,5+1,5 Punkte)

(a) Behauptung: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$:

Beweis:

$$\begin{aligned}
 x \in (A \cup B) \cap C & \iff x \in (A \cup B) \wedge x \in C \\
 & \iff (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcl}
\text{Distr-Ges} & \Longleftrightarrow & (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \\
& \Longleftrightarrow & x \in (A \cap C) \vee x \in (B \cap C) \\
& \Longleftrightarrow & x \in (A \cap C) \cup (B \cap C).
\end{array}$$

(b) Behauptung: $M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$.

Anwendung der de-Morganschen Regeln aus der Aussagenlogik (siehe Vorlesung Satz 0.1. (g) und (h)).

Wir benötigen insbesondere die Regel:

$$(*) \quad \neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow \neg A \vee \neg B.$$

Zum Beweis:

$$\begin{array}{lcl}
x \in M \setminus (A \cap B) & \Longleftrightarrow & x \in M \wedge x \notin (A \cap B) \\
& \Longleftrightarrow & x \in M \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) \\
& \stackrel{(*)}{\Longleftrightarrow} & x \in M \wedge (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)) \\
& \stackrel{\text{Distr.}}{\Longleftrightarrow} & (x \in M \wedge \neg(x \in A)) \vee (x \in M \wedge \neg(x \in B)) \\
\text{Definition} & \Longleftrightarrow & x \in M \setminus A \vee x \in M \setminus B \\
\text{Definition} & \Longleftrightarrow & x \in (M \setminus A) \cup (M \setminus B)
\end{array}$$

(c) Behauptung: $M \setminus (M \setminus A) = A \cap M$

Wir verwenden wieder die de-Morgansche Regel (*), und zwar wie folgt:

$$\neg(x \in M \setminus A) \Longleftrightarrow \neg(x \in M \wedge x \notin A) \Longleftrightarrow x \notin M \vee x \in A.$$

Zum Beweis:

$$\begin{array}{lcl}
x \in M \setminus (M \setminus A) & \Longleftrightarrow & x \in M \wedge x \notin (M \setminus A) \\
& \stackrel{(*)}{\Longleftrightarrow} & x \in M \wedge (x \notin M \vee x \in A) \\
\text{Distr.-Gesetz} & \Longleftrightarrow & \underbrace{(x \in M \wedge x \notin M)}_{\text{“falsch”}} \vee (x \in M \wedge x \in A) \\
& \Longleftrightarrow & \text{“falsch”} \vee (x \in M \cap A) \\
& \Longleftrightarrow & x \in M \cap A.
\end{array}$$

4. (1,5+1+1,5 Punkte)

Zu jeder reellen Zahl a und zu jeder positiven reellen Zahl ϵ existiert eine rationale Zahl q , so daß die Abweichung zwischen a und q kleiner als ϵ ist.

(a) Formalisierung dieser Aussage, mit zunehmender Vereinfachung der Schreibweise:

- $\forall a \forall \epsilon [(a \in \mathbb{R} \wedge \epsilon \in \mathbb{R} \wedge \epsilon > 0) \implies \exists q (q \in \mathbb{Q} \wedge |a - q| < \epsilon)]$
- $\forall a \in \mathbb{R} \forall \epsilon \in \mathbb{R} [\epsilon > 0 \implies \exists q \in \mathbb{Q} (|a - q| < \epsilon)]$
- $\forall a \in \mathbb{R} \forall 0 < \epsilon \in \mathbb{R} \exists q \in \mathbb{Q} : |a - q| < \epsilon$

(b) Negation obiger Aussagen:

- $\exists a \exists \epsilon [a \in \mathbb{R} \wedge \epsilon \in \mathbb{R} \wedge \epsilon > 0 \wedge \forall q (q \notin \mathbb{Q} \vee (|a - q| \geq \epsilon))]$
- $\exists a \in \mathbb{R} \exists \epsilon \in \mathbb{R} [\epsilon > 0 \wedge \forall q \in \mathbb{Q} (|a - q| \geq \epsilon)]$
- $\exists a \in \mathbb{R} \exists 0 < \epsilon \in \mathbb{R} \forall q \in \mathbb{Q} : |a - q| \geq \epsilon$

(c) Sei $a = 10.04987\dots$ und $\epsilon = \frac{1}{100}$. Geben Sie ein geeignetes q an, das a innerhalb der Genauigkeit ϵ approximiert.

Wähle $q := 10 + \frac{4}{10} \in \mathbb{Q}$. Dann gilt:

$$|a - q| = \left| 10.04987\dots - \left(10 + \frac{4}{10}\right) \right| = \left| 10 + \frac{4}{10} + 0.00987\dots - \left(10 + \frac{4}{10}\right) \right| = 0.00987\dots < 0.01 = \frac{1}{100} \iff 0.987\dots < 1$$

5. Eine Lösung in Pascal:

```

program raetsel(input,output);
var a,b,c,d,e,b1,b2,b3,b4,b5,b6 : boolean;
begin
  (* a:=Albright bekommt den Preis;
     b:=Branebender bekommt den Preis;
     c:=Catchfinder bekommt den Preis;
     d:=Dodgeley bekommt den Preis;
     e:=Egghead bekommt den Preis;
     Bedingungen:
     b1:=a or b;
     b2:=((not b) and c) or (b and (not c))   aequivalent   (b<>c);
     b3:=d or e;
     b4:=aus e folgt d                         aequivalent   e<=d;
     b5:=(c and d) or ((not c) and (not d))   aequivalent   (c=d);
     b6:=aus e folgt (not a)                   aequivalent   e<=not a;
  *)
  for a:=false to true do
  for b:=false to true do
  for c:=false to true do
  for d:=false to true do
  for e:=false to true do
  begin
    b1:=a or b; b2:=b<>c; b3:=d or e;

```

```

b4:=e<=d;   b5:=c=d;   b6:=e<=not a;
if (b1 and b2 and b3 and b4 and b5 and b6) then
begin
  write(' Den Preis gewinnt: ');
  if a then write(' Albright ');
  if b then write(' Branebender ');
  if c then write(' Catchfinder ');
  if d then write(' Dodgeley ');
  if e then write(' Egghead ');
  writeln; (* andere Moeglichkeit *)
end; (* if *)
end; (* for *)
writeln;
end.

```

Ausgabe: Den Preis gewinnt: Albright Catchfinder Dodgeley

Eine alternative Lösung durch logisches Schließen:

A:=Albright bekommt den Preis;

B:=Branebender bekommt den Preis;

C:=Catchfinder bekommt den Preis;

D:=Dodgeley bekommt den Preis;

E:=Egghead bekommt den Preis;

- Albright und Branebender sind Neffen des Besitzers der Zeitung und deshalb muß wenigstens einer von ihnen einen Preis bekommen

$$\iff A \vee B$$
- Branebender oder Catchfinder müssen aber auch gewinnen, aber nicht beide, weil sie den Preis im vorigen Jahr gemeinsam bekommen haben

$$\iff (B \vee C) \wedge \neg(B \wedge C)$$
- Dodgeley oder Egghead, oder beide, sind auch als Sieger vorgemerkt. Freilich, sollte Egghead Preisträger werden, muß Dodgeley auch gewinnen, sonst ist der Teufel los

$$\iff (D \vee E) \wedge (E \implies D)$$
- Zu alledem hat Catchfinder auch noch das Kreuzworträtsel von Dodgeley abgeschrieben; also müssen beide einen Preis kriegen – oder keiner von beiden

$$\iff (D \iff E)$$
- Albright will den Preis ablehnen, wenn Egghead auch einen bekommt

$$\iff (E \implies \neg A)$$

Das liefert:

$$A \vee B$$

$$B \vee C$$

$$\neg(B \wedge C) \iff (\neg B \vee \neg C)$$

$$D \vee E$$

$$(E \implies D) \iff (\neg E \vee D)$$

$$D \iff C$$

$$(E \implies \neg A) \iff (\neg E \vee A)$$

Da also D durch C ersetzbar ist, folgt

$(C \vee E) \wedge (\neg E \vee C)$, also $C \vee (E \wedge \neg E)$, also $C \vee$ "falsch", also C . Ferner folgt damit $\neg C$ falsch, d.h. $\neg B \vee \neg C$ liefert $\neg B$

Damit ist C wahr und wegen $C \iff D$ damit auch D wahr. Damit ergeben sich die Aussagen

$(A \vee B) \wedge \neg B$, also woraus A folgt (da ja B falsch), damit $\neg A$ falsch, also liefert $\neg E \vee \neg A$ die Aussage $\neg E$, insgesamt also:

$$A \wedge C \wedge D \wedge \neg B \wedge \neg E.$$

Es bekommen also genau Albright, Catchfinder und Dodgeley den Preis.