

Analysis für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei M eine Menge und I eine nicht leere (Index)menge. A_i und B_i seien für jedes $i \in I$ ebenfalls Mengen.

(a) Zeigen Sie:

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup M = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup M)$$

(b) Beantworten Sie (mit Begründung!), ob immer gilt

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B_i) \quad .$$

Aufgabe 7 (4 Punkte)

(a) Seien A, B, C, D Mengen. Zeigen Sie:

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

(b) Gilt

$$(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$$

für beliebige Mengen A, B, C, D ? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Zeigen Sie:

$$(a) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (k, n \in \mathbb{N}_0, k \leq n)$$

$$(b) \quad \binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k} \quad (k, m, n \in \mathbb{N}_0, k \leq m \leq n)$$

$$(c) \quad \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \dots + \binom{2n+1}{n} = 4^n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Bitte wenden!

Aufgabe 9 (4 Punkte) Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, & f_1(x) &= \frac{x}{2}, \\ f_2 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, & f_2(x) &= x^2, \\ f_3 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, & f_3(x) &= -x, \\ f_4 : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}, & f_4(x) &= \frac{1}{x}, \\ g_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, & g_1(x_1, x_2) &= (f_1(x_1), f_3(x_2)) \\ g_2 : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2, & g_2(x_1, x_2) &= (f_2(x_2), f_4(x_1)) \\ h : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}, & h(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Funktionen $f_1 \circ f_2 \circ f_4$, $f_3 \circ f_2 \circ h$, $f_2 \circ h \circ g_1$ und $g_1 \circ g_2$.

Aufgabe 10*

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $k_1, \dots, k_l \in \mathbb{N}_0$ ($l \geq 2$) mit $k_1 + \dots + k_l = n$.

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_l} := \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_l!}$$

wird als Multinomialkoeffizient bezeichnet. Er gibt an, wieviele n -Tupel aus l paarweise verschiedenen Elementen x_1, \dots, x_l gebildet werden können, wenn jedes x_i genau k_i -fach im n -Tupel vorkommen soll.

(a) Zeigen Sie:

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_l} = \binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \dots \binom{n-k_1-\dots-k_{l-2}}{k_{l-1}}$$

(b) Erstellen Sie ein Programm, das Multinomialkoeffizienten nach der in (a) angegebenen Methode berechnet. Verwenden Sie zur Auswertung der Binomialkoeffizienten die in der Vorlesung vorgestellte Berechnungsreihenfolge. Berechnen Sie mit Ihrem Programm

$$\binom{8}{2, 3, 3}, \quad \binom{50}{20, 20, 10}, \quad \binom{100}{25, 11, 37, 27}, \quad \binom{500}{200, 150, 20, 80, 50}.$$

Alle Beispiele lassen sich mit dem üblichen 64-Bit IEEE-Gleitpunktdatentyp durchführen.

(c) Worin liegt der Vorteil der in (b) beschriebenen Methode gegenüber der direkten Auswertung der Definition?

Abgabe zu zweit oder zu dritt: Montag, 12.11.2007 bis 16¹⁵ Uhr,
Übungskasten vor der Bibliothek im 1. Stock

*Diese Zusatzaufgabe soll weitere Anwendungsmöglichkeiten des Vorlesungsstoffes aufzeigen. Sie wird aber nicht korrigiert und ist auch nicht prüfungsrelevant.