

Lösungsvorschläge zu Analysis I für Informatiker

Blatt 6

26. (4 Punkte)

a) Es ist mit vollständiger Induktion zu zeigen:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n! \geq 2^{n-1}$$

Beweis:

Induktionsanfang: $n = 1$ Es ist $1! = 1 \geq 1 = 2^0 = 2^{1-1}$

Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$

Induktionsvoraussetzung : Es gelte für ein $n \in \mathbb{N} : n! \geq 2^{n-1}$

Dann ist

$$\begin{aligned}(n+1)! &= (n+1) \cdot n! \\ &\stackrel{\text{IV}}{\geq} (n+1) \cdot 2^{n-1} \quad (\text{denn: } n! \geq 2^{n-1} \xRightarrow{n+1 \geq 0} (n+1) \cdot n! \geq (n+1) \cdot 2^{n-1}) \\ &\geq 2 \cdot 2^{n-1} \quad (\text{denn: } n \geq 1 \implies n+1 \geq 2) \\ &= 2^n = 2^{(n+1)-1}\end{aligned}$$

b) Es ist mit vollständiger Induktion zu zeigen:

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n} \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

Wir können die Behauptung auf zweierlei Art lesen (nebeneinander stehende Allquantoren darf man vertauschen):

$$\forall n \in \mathbb{N} \left[\forall m \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n} \right] \quad (*)$$

$$\forall m \in \mathbb{N} \left[\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n} \right] \quad (**)$$

Dem entsprechend kann man die Induktion über n oder über m machen. Was günstiger ist, entscheidet sich meist im Induktionsschritt, und der erscheint in der Variante $(*)$ einfacher: Wir müssen eine Summe $\sum_i^{n+1} a_i$ auf eine Summe $\sum_i^n a_i$

zurückführen, und das ist durch Aufsplitten der Summe in $\sum_i^{n+1} a_i = \sum_i^n a_i + a_{n+1}$ recht einfach. Wir machen also Induktion nach n gemäß Variante $(*)$.

Induktionsanfang: $n = 1$

$$\forall m \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^1 \binom{m+k}{k} = \binom{m}{0} + \binom{m+1}{1} \stackrel{\text{Def.}}{=} 1 + (m+1) = m+2 \stackrel{\text{Def.}}{=} \binom{m+2}{1}$$

Induktionsschritt : $n \mapsto n + 1$

Induktionsvoraussetzung : Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ $\left[\forall m \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n+1} \right]$

Zu zeigen ist: $\forall m \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n+1} \binom{m+k}{k} = \binom{m+(n+1)+1}{n+1}$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n+1} \binom{m+k}{k} &= \sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} + \binom{m+(n+1)}{n+1} \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \binom{m+n+1}{n} + \binom{m+n+1}{n+1} \\ &\stackrel{\text{Aufg. 26 oder}}{\stackrel{\text{0.13 Vorl.}}{=}} \binom{m+n+1+1}{n+1} = \binom{m+(n+1)+1}{n+1} \end{aligned}$$

27. (4 Punkte)

a) Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitzstetig und es gebe ein $\mathbb{R} \ni \delta > 0$ so, daß $|f(x)| \geq \delta$ für alle $x \in I$ (*).

Behauptung: Die Funktion $\frac{1}{f(x)}$ ($x \in I$) ist lipschitzstetig auf I .

Beweis:

Zunächst ist die Funktion $\frac{1}{f(x)}$ wohldefiniert, da für den Nenner $f(x)$ wegen $|f(x)| \geq \delta > 0$ $f(x) \neq 0$ ist.

f ist lipschitzstetig, d. h. $\exists L > 0 \forall x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$ (**)

Zu zeigen: $\exists L_1 > 0 \forall x, y \in I : \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)} \right| \leq L_1 \cdot |x - y|$

Seien also $x, y \in I$ beliebig gewählt; dann gilt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)} \right| &= \left| \frac{f(y) - f(x)}{f(x) \cdot f(y)} \right| \\ &\stackrel{(**)}{\leq} \frac{1}{|f(x) \cdot f(y)|} \cdot L \cdot |x - y| \\ &\stackrel{(\clubsuit)}{\leq} \underbrace{\frac{L}{\delta^2}}_{=: L_1 > 0} \cdot |x - y| \end{aligned}$$

wobei (\clubsuit) gilt wegen (*) : $|f(x)| \geq \delta > 0$ und $|f(y)| \geq \delta > 0 \implies$

$$|f(x)f(y)| \geq \delta^2 > 0 \implies \frac{1}{|f(x)f(y)|} \leq \frac{1}{\delta^2}$$

Damit ist die Funktion $\frac{1}{f(x)}$ lipschitzstetig auf I mit der Lipschitzkonstanten

$$L_1 = \frac{1}{\delta^2} > 0.$$

b) Es sei für $a > 0$ $I := [a, \infty[$

Behauptung: Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \in I$) ist auf I Lipschitzstetig.

Beweis:

Zu zeigen: $\exists L > 0 \forall x, y \geq a : \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \leq L \cdot |x - y|$.

Seien also $x, y \geq a$ beliebig gewählt; dann gilt:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \\ &= \left| \frac{y - x}{xy} \right| \\ &\stackrel{(\clubsuit)}{\leq} \underbrace{\frac{1}{a^2}}_{=: L > 0} \cdot |x - y| \end{aligned}$$

Dabei gilt (\clubsuit) wegen $x, y \geq a > 0 \implies x \cdot y \geq a^2 > 0 \implies \frac{1}{xy} \leq \frac{1}{a^2}$

28. (4 Punkte)

Es sei im Folgenden $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ und $\mathbb{R} \ni a > 0$.

a) Behauptung: $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R} : f(x) := \sqrt[k]{x}$ ist Lipschitzstetig auf I .

Beweis:

Zu zeigen: $\exists L > 0 \forall x, y \geq a : |\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{y}| \leq L \cdot |x - y|$

Wir benutzen die für alle $u, v \in \mathbb{R}$ gültige Beziehung:

$$u^k - v^k = (u - v) \left(\sum_{l=0}^{k-1} u^l v^{k-1-l} \right) = (u - v) (u^{k-1} + u^{k-2}v + \dots + uv^{k-2} + v^{k-1}) \quad (*)$$

Beweis dafür:

$$\begin{aligned} (u - v) \left(\sum_{l=0}^{k-1} u^l v^{k-1-l} \right) &\stackrel{\text{distr.}}{=} u \cdot \sum_{l=0}^{k-1} u^l v^{k-1-l} - v \cdot \sum_{l=0}^{k-1} u^l v^{k-1-l} \\ &\stackrel{\text{distr}}{=} \sum_{l=0}^{k-1} u^{l+1} v^{k-1-l} - \sum_{l=0}^{k-1} u^l v^{k-1-l+1} \\ &= \underbrace{\sum_{l=0}^{k-1} u^{l+1} v^{k-(l+1)}}_{\substack{\text{Indextransf.} \\ 0 \leq l \leq k-1 \iff 1 \leq l+1 \leq k \\ \text{ersetze } l+1 \text{ durch } l}} - \sum_{l=0}^{k-1} u^l v^{k-l} \\ &= \sum_{l=1}^k u^l v^{k-l} - \sum_{l=0}^{k-1} u^l v^{k-l} \\ &= \left(\sum_{l=1}^{k-1} u^l v^{k-l} + u^k v^{k-k} \right) - \left(u^0 v^{k-0} + \sum_{l=1}^{k-1} u^l v^{k-l} \right) \\ &= u^k - v^k \end{aligned}$$

$$\text{Daraus folgt für alle } u, v > 0 : u - v = \frac{u^k - v^k}{\sum_{l=0}^{k-1} u^l v^{k-1-l}} \quad (**)$$

Nun setzen wir $u := \sqrt[k]{x}$ und $v := \sqrt[k]{y}$ für unsere $x, y \geq a > 0$, d.h. es ist $\sqrt[k]{x^k} = x$ und $\sqrt[k]{y^k} = y$, und die Formel (**) liefert:

$$\begin{aligned} |\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{y}| &= \left| \frac{\sqrt[k]{x^k} - \sqrt[k]{y^k}}{\sum_{l=0}^{k-1} (\sqrt[k]{x})^l \cdot (\sqrt[k]{y})^{k-1-l}} \right| \\ &\stackrel{(\clubsuit)}{\leq} \frac{|x - y|}{\sum_{l=0}^{k-1} (\sqrt[k]{a})^{k-1}} = \frac{|x - y|}{\sum_{l=0}^{k-1} \frac{(\sqrt[k]{a})^k}{\sqrt[k]{a}}} \\ &= \frac{|x - y|}{k \cdot \sqrt[k]{a}} \\ &= \underbrace{\frac{\sqrt[k]{a}}{k \cdot a}}_{=: L > 0} \cdot |x - y| \end{aligned}$$

Dabei gilt (\clubsuit) wegen

$$x, y \geq a > 0 \stackrel{\text{Vorles.}}{\implies} \sqrt[k]{x}, \sqrt[k]{y} \geq \sqrt[k]{a} \implies (\sqrt[k]{x})^l \cdot (\sqrt[k]{y})^{k-1-l} \geq (\sqrt[k]{a})^l \cdot (\sqrt[k]{a})^{k-1-l} = (\sqrt[k]{a})^{l+k-1-l} = (\sqrt[k]{a})^{k-1}$$

Also ist $f(x) = \sqrt[k]{x}$ Lipschitzstetig auf $I = [a, \infty[$ mit der Lipschitzkonstanten $L = \frac{\sqrt[k]{a}}{ka}$.

b) Behauptung: $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R} : f(x) := \sqrt[k]{x}$ ist nicht Lipschitzstetig auf I .

Beweis:

Es ist zu zeigen: $\forall L > 0 \exists x, y \geq 0 : |\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{y}| > L \cdot |x - y|$

Aufgabenteil a) sagt aus, daß für jede Wahl von $a > 0$ für die linke Grenze des Intervalls $[a, \infty[$ Lipschitzstetigkeit vorliegt. Es liegt also nahe, als kritischen Punkt in der Lipschitz-Abschätzung den Punkt 0 zu vermuten.

Zu festem, aber beliebigem $L > 0$ setzen wir also $y := 0$ und suchen ein $x > 0$, für das $|\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{0}| > L \cdot |x - 0| \iff |\sqrt[k]{x}| > L \cdot |x|$ erfüllt ist:

$$\begin{aligned} |\sqrt[k]{x}| > L \cdot |x| &\stackrel{\text{da } x \geq 0}{\iff} x = (\sqrt[k]{x})^k > (L \cdot x)^k = L^k \cdot x^k \stackrel{x \neq 0}{\iff}_{L > 0} \left(\frac{1}{L}\right)^k > x^{k-1} \iff \\ &\iff 0 < x < \sqrt[k-1]{\left(\frac{1}{L}\right)^k} \end{aligned}$$

Man wähle also zum Beispiel für $x_0 = \frac{1}{2} \sqrt[k-1]{\left(\frac{1}{L}\right)^k}$; dafür gilt dann wie gewünscht $\sqrt[k]{x_0} > L \cdot x_0$.

Wir mußten aber nicht $y = 0$ setzen. Der Ansatz $x_n = \frac{2^k}{n^k}$, $y_n = \frac{1}{n^k}$ für ein noch zu bestimmendes $n \in \mathbb{N}$ liefert zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \left| \sqrt[k]{x_n} - \sqrt[k]{y_n} \right| &= \left| \frac{2}{n} - \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} > L \cdot |x_n - y_n| \text{ Verlngerbare} = \left| \frac{2^k}{n^k} - \frac{1}{n^k} \right| \iff \frac{1}{n} > \\ L \cdot \frac{2^k - 1}{n^k} &\iff n^{k-1} = \frac{n^k}{n} > L \cdot (2^k - 1) \stackrel{\text{Vorles.}}{\iff} n > \sqrt[k-1]{L \cdot (2^k - 1)}. \end{aligned}$$

Man wähle also ein solches $n \in \mathbb{N}$, und dann gilt für die zugehörigen x_n, y_n :
 $\left| \sqrt[k]{x_n} - \sqrt[k]{y_n} \right| > L \cdot |x_n - y_n|$

29. (4 Punkte)

a) Seien λ_1, λ_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 = x + 1$. Dann gilt:

Behauptung: Für beliebige $A, B \in \mathbb{R}$ erfüllt die Folge $a_n := A \cdot \lambda_1^n + B \cdot \lambda_2^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) die rekursive Beziehung $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Beweis:

Daß diese Beziehung für beliebige $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist prüft man einfach durch Einsetzen nach:

$$\begin{aligned} a_n + a_{n-1} &= (A \cdot \lambda_1^n + B \cdot \lambda_2^n) + (A \cdot \lambda_1^{n-1} + B \cdot \lambda_2^{n-1}) \\ &= A \cdot (\lambda_1^n + \lambda_1^{n-1}) + B \cdot (\lambda_2^n + \lambda_2^{n-1}) \\ &= A \cdot \lambda_1^{n-1} \cdot \underbrace{(\lambda_1 + 1)}_{=\lambda_1^2} + B \cdot \lambda_2^{n-1} \cdot \underbrace{(\lambda_2 + 1)}_{=\lambda_2^2} \\ &\stackrel{(*)}{=} A \cdot \lambda_1^{n-1} \cdot \lambda_1^2 + B \cdot \lambda_2^{n-1} \cdot \lambda_2^2 \\ &= A \cdot \lambda_1^{n+1} + B \cdot \lambda_2^{n+1} \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} a_{n+1} \end{aligned}$$

Dabei gilt die Gleichheit bei (*), weil λ_1 und λ_2 Lösungen der Gleichung $x^2 = x + 1$ sind, d.h. es ist $\lambda_1^2 = \lambda_1 + 1$ und $\lambda_2^2 = \lambda_2 + 1$.

b) Es sind $A, B \in \mathbb{R}$ so zu bestimmen, daß die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Fibonacci-Folge darstellt, die durch die Rekursionsvorschrift

$$(*) \quad \begin{cases} a_0=1 \\ a_1=1 \end{cases} \quad \wedge \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

definiert ist.

In Teil a) wurde gezeigt, daß unabhängig von den Startwerten a_0 und a_1 der Rekursion die Festlegung $a_n = A \cdot \lambda_1^n + B \cdot \lambda_2^n$ für jede Belegung von A, B der Rekursionsbeziehung $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ genügt. Bestimmen wir also die Konstanten A, B gerade so, daß die Folgenterme a_n für $n = 0$ und $n = 1$ auch den Anfangsbedingungen der Rekursion genügen, d.h. gilt:

$$1 = a_0 = A \cdot \lambda_1^0 + B \cdot \lambda_2^0 = A + B$$

$$1 = a_1 = A \cdot \lambda_1^1 + B \cdot \lambda_2^1 = A\lambda_1 + B\lambda_2$$

so erfüllt die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sowohl die Anfangsbedingungen in (*) als auch die Rekursionsvorschrift, wie in Teil a) gezeigt wurde.

Zu lösen ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= A + B \\ 1 &= A\lambda_1 + B\lambda_2 \end{aligned}$$

Die λ_i sind Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 = x + 1$:
 $x^2 = x + 1 \iff x^2 - x = 1 \iff x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 1 \iff$
 $\iff (x - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} \iff |x - \frac{1}{2}| = \frac{\sqrt{5}}{2} \iff x - \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
 Also sind $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ die gesuchten Lösungen.

Damit ist

$$(\clubsuit) \quad \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} 1 &= A\lambda_1 + B\lambda_2 = A\lambda_1 + B\lambda_1 - B\lambda_1 + B\lambda_2 = \underbrace{(A+B)}_{=1} \lambda_1 + B \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) = \\ &= \lambda_1 + B \cdot \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{=-\sqrt{5}} \xrightarrow{(\clubsuit)} -\sqrt{5} \cdot B = \underbrace{1 - \lambda_1}_{=\lambda_2} \xrightarrow{(\clubsuit)} B = -\frac{1}{\sqrt{5}} \lambda_2 \end{aligned}$$

Ferner:

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \implies A = 1 - B = 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\sqrt{5} + \lambda_2) \stackrel{(\clubsuit)}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot ((\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \lambda_1 \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ B &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \lambda_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

c) Behauptung: Für die Fibonacci-Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Beweis:

Wir benutzen Satz 2.7)e) der Vorlesung: $|q| < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ (**).

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &\stackrel{\text{nach b)}}{=} \frac{A\lambda_1^{n+1} + B\lambda_2^{n+1}}{A\lambda_1^n + B\lambda_2^n} \\ &= \frac{\lambda_1^n \left[A\lambda_1 + B \frac{\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1^n} \right]}{\lambda_1^n \left[A + B \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \right]} \\ &\stackrel{\text{Kürzen}}{=} \frac{A\lambda_1 + B\lambda_2 \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n}{A + B \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n} \end{aligned}$$

Nun ist hier

$$\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| = \left| \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \right| = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4} < 1,$$

denn es ist

$$\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4} < 1 \iff (\sqrt{5}-1)^2 < 4 \stackrel{\text{da } \sqrt{5} > 1}{\iff} \sqrt{5}-1 < 2 \iff \sqrt{5} < 3 \iff 5 < 9$$

Damit aber gilt nach (**)

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies$$

$$(**) \quad \begin{cases} A + B \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \neq 0 \\ A\lambda_1 + B\lambda_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A\lambda_1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{2.5)d)}]{\text{Vorles.}} \frac{A\lambda_1 + B\lambda_2 \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n}{A + B \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{A\lambda_1}{A} = \lambda_1 \quad \text{q.e.d.}$$

30. Es sei $B \in \mathbb{N}$, $B \geq 2$, $\mathbb{R} \ni x = \frac{s}{t}$ mit $s, t \in \mathbb{N}$, $s < t$ und s, t teilerfremd.

a) Für den in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus zur Bestimmung der B -adischen Entwicklung von x , d.h.

$$a_0 = x$$

$$z_{k+1} = [Ba_k]$$

$$a_{k+1} = Ba_k - z_{k+1} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0$$

gilt, daß $l \in \mathbb{N}_0$ und $p \in \mathbb{N}$ existieren mit

$$\forall k \geq l : a_{k+p} = a_k \quad \text{und} \quad \forall k > l : z_{k+p} = z_k$$

d.h. in der Periodenschreibweise ist $x = 0.z_1 z_2 \dots z_l \overline{z_{l+1} \dots z_{l+p}}$, sofern mindestens ein $z_k \neq 0$ mit $k \in \{l+1, \dots, l+p\}$ existiert.

Beweis:

Erinnerung: Nach Vorlesung 1.17)b) gilt

$$(1) \quad a_k = B \cdot a_{k-1} - [B \cdot a_{k-1}] \in [0, 1[\quad (\text{für } k \in \mathbb{N}) \quad \text{nach Definition von } [\cdot]$$

$$(2) \quad z_k \in \{0, 1, \dots, B-1\} \quad (\text{für } k \in \mathbb{N})$$

$$(3) \quad x = \sum_{k=1}^n z_k B^{-k} + a_n \cdot B^{-n} \quad (\text{für } n \in \mathbb{N}_0).$$

Wir zeigen zunächst für alle $k \in \mathbb{N}_0$: $a_k \in \{0, \frac{1}{t}, \dots, \frac{t-1}{t}\}$

Beweis:

Entweder: direkt mit Hilfe der in der Vorlesung gezeigten Aussagen zur B -adischen Entwicklung:

$$\text{Für alle } k \in \mathbb{N} \text{ ist } 0 \leq a_k = B \cdot a_{k-1} - z_k \stackrel{\text{Def.}}{=} B \cdot a_{k-1} - [B \cdot a_{k-1}] \stackrel{(1)}{<} 1$$

$$\xRightarrow[t > 0]{} 0 \leq ta_k < t \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
\text{Wegen (3) gilt: } a_k \cdot B^{-k} &= x - \sum_{j=1}^k z_j B^{-j} \implies a_k = B^k \cdot \left(x - \sum_{j=1}^{k-1} z_j B^{-j} \right) \\
\implies t \cdot a_k &= t B^k \cdot \left(x - \sum_{j=1}^{k-1} z_j B^{-j} \right) \stackrel{x=\frac{s}{t}}{=} t B^k \frac{s}{t} - t \cdot \sum_{j=1}^{k-1} z_j B^{k-j} = \\
&= B^k s - t \cdot \sum_{j=1}^{k-1} z_j B^{k-j} \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

(denn in der Summe ist $1 \leq j \leq k-1 < k \implies k-j > 0$, also $B^{k-j} \in \mathbb{N}$, $z_j \in \mathbb{N}_0$, $s \in \mathbb{N}$).

Damit also $0 \leq ta_k < t \in \mathbb{N}$ und $ta_k \in \mathbb{Z} \implies ta_k \in \{0, \dots, t-1\} \implies a_k \in \{0, \frac{1}{t}, \dots, \frac{t-1}{t}\}$ q.e.d.

Oder mit Induktion:

Induktionsanfang $k=0$: $a_0 = x = \frac{s}{t} = s \cdot \frac{1}{t} \in \{0, \dots, \frac{t-1}{t}\}$

(da $s \in \mathbb{N}$ und $s < t$).

Induktionsschritt $k \mapsto k+1$:

Induktionsvoraussetzung: Es gelte für ein $k \in \mathbb{N}_0$: $a_k \in \{0, \frac{1}{t}, \dots, \frac{t-1}{t}\}$.

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= Ba_k - z_{k+1} \text{ und } z_{k+1} = [Ba_k] \stackrel{\text{Def.}}{\implies} z_{k+1} \leq Ba_k < z_{k+1} + 1 \implies \\
&\stackrel{t>0}{\implies} tz_{k+1} \leq tBa_k < tz_{k+1} + t \implies 0 \leq Bta_k - tz_{k+1} < t \quad (5)
\end{aligned}$$

Nach IV ist $\mathbb{N}_0 \ni ta_k$ und $0 \leq ta_k < t-1 \implies$

$$\begin{aligned}
0 \leq ta_{k+1} &= t \cdot (Ba_k - z_{k+1}) = B \underbrace{ta_k - tz_{k+1}}_{\substack{\in \mathbb{N}_0 \\ \in \mathbb{Z}}} \stackrel{(5)}{<} t \implies \\
&\implies ta_k \in \mathbb{Z} \cap [0, t[= \{0, \dots, t-1\} \implies a_k \in \{0, \frac{1}{t}, \dots, \frac{t-1}{t}\} \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Nun zum Beweis von a):

Es ist $a_k \in \{0, \frac{1}{t}, \dots, \frac{t-1}{t}\}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, und diese Menge enthält genau t Elemente. Da es aber unendliche viele Indizes $k \in \mathbb{N}_0$ gibt, für die die Werte a_k angenommen werden, muß es mindestens zwei Indizes $\mu, \nu \in \mathbb{N}_0$ geben mit $\nu < \mu$, für die $a_\nu = a_\mu$ gilt (wären alle a_i verschieden, so gäbe es ja unendlich viele Werte für die a_i und nicht nur t Stück). Dann gilt aber:

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : a_{\nu+i} = a_{\mu+i} \quad (6)$$

denn mit Induktion nach $i \in \mathbb{N}_0$:

Induktionsanfang $i=0$: $a_{\nu+0} = a_\nu = a_\mu = a_{\mu+0}$

Induktionsschritt $i \mapsto i+1$:

Sei für ein $i \geq 0$ schon bewiesen, daß $a_{\nu+i} = a_{\mu+i}$ (IV).

Dann folgt:

$$a_{\nu+i+1} \stackrel{(1)}{=} B \cdot a_{\nu+i} - [B \cdot a_{\nu+i}] \stackrel{\text{IV}}{=} B \cdot a_{\mu+i} - [B \cdot a_{\mu+i}] \stackrel{\text{Def.}}{=} a_{\mu+i+1} \quad \text{q.e.d.}$$

Definiere nun

$$l := \nu \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad p := \mu - \nu \in \mathbb{N}$$

Dann gilt für alle $k \geq l = \nu$:

$$a_{k+p} \stackrel{\text{Def.}}{=} a_{k+(\mu-\nu)} = a_{\mu+(k-\nu)} \stackrel{(6)}{=} a_{\nu+(k-\nu)} = a_k \quad (7)$$

Ferner gilt für alle $k > l$:

$$z_{k+p} \stackrel{\text{Def.}}{=} [B \cdot a_{k+p-1}] = [B \cdot a_{k-1+p}] \stackrel[k-1 \geq 0]{(7)}{=} [B \cdot a_{k-1}] \stackrel{\text{Def.}}{=} z_k \quad \text{q.e.d.}$$

(b) Der Algorithmus aus a) läßt sich in der Gestalt

$$s_0 = s; \quad Bs_k = t \cdot z_{k+1} + s_{k+1} \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}_0, \quad s_k \in \mathbb{N}_0$$

darstellen, worin $s_k \in \{0, 1, \dots, t-1\}$ und $a_k = \frac{s_k}{t}$.
(Ganzzahlige Division von Bs_k durch t mit Rest)

Beweis:

Im Beweis des Hinweises unter a) wurde eigentlich bereits alles gezeigt.

Wir setzen $s_0 = s = t \cdot a_0 = tx$ wie gefordert. Ferner:

$s_k := t \cdot a_k$ für $k \geq 0$. Dann gilt insbesondere $a_k = \frac{s_k}{t}$.

In obigem Beweis wurde bereits gezeigt, daß $ta_k \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq ta_k \leq t-1$. Dann folgt mit (1) oben:

$$ta_{k+1} = t \cdot (Ba_k - z_{k+1}) = tBa_k - tz_{k+1} \implies B(ta_k) = tz_{k+1} + ta_{k+1} \stackrel{\text{Def. } s_k}{\implies}$$

$$Bs_k = t \cdot z_{k+1} + s_{k+1}.$$

Da dabei $0 \leq s_k \leq t-1$ gilt, handelt es sich um die eindeutig bestimmte Division von Bs_k durch t mit Rest.

Zur Division mit Rest:

Für beliebige $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}_0$ gibt es eindeutig bestimmte $q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}_0$ mit:

$$b = q \cdot a + r \quad \text{mit } 0 \leq r < a$$

Beweis:

Definiere $M := \{b - i \cdot a \mid i \in \mathbb{Z} \wedge b - ia \geq 0\} \subset \mathbb{N}_0$. Dann gilt wegen $b = b - 0 \cdot a \geq 0$, daß $b \in M$, d.h. M nichtleere Menge natürlicher Zahlen, und damit besitzt M ein Minimum $r := \min(M)$. Dann gibt es nach Definition von M ein $q \in \mathbb{Z}$ mit $r = b - qa$.

Wäre $r \geq a$, so $b - qa = r \geq a \implies r = b - qa > b - q - a = b - (q+1)a \geq 0 \stackrel{\text{Def. } M}{\implies}$

$r > b - (q+1)a \in M$, was der Minimalität von r in M widerspricht. Also muß $r < a$ gelten, d.h. $0 \leq r < a$, und $b = qa + r$ ist eine Zerlegung der gewünschten Art.

Zur Eindeutigkeit:

Wenn es zwei Zerlegungen gibt, d.h.

$$b = qa + r \quad \text{mit } q \in \mathbb{Z} \text{ und } 0 \leq r < a \text{ und}$$

$$b = q_1a + r_1 \quad \text{mit } q_1 \in \mathbb{Z} \text{ und } 0 \leq r_1 < a,$$

$$\text{so sei ohne Einschränkung } r_1 \geq r \implies 0 \leq r_1 - r < a - r \leq a \quad (*).$$

Dann ist

$$0 = b - b = (aq + r) - (aq_1 + r_1) = a(q - q_1) + (r - r_1) \implies a(q - q_1) = r_1 - r \geq 0$$

$$\text{Damit aber nach } (*) \quad 0 \leq a(q - q_1) = r_1 - r < a \stackrel{a > 0}{\implies} 0 \leq q - q_1 < 1 \stackrel{q - q_1 \in \mathbb{Z}}{\implies} q - q_1 = 0$$

$$\implies q = q_1.$$

$$\text{Dann folgt aber auch } qa + r = b = q_1a + r_1 \stackrel{q=q_1}{\implies} qa + r_1 \implies r = r_1 \quad \text{q.e.d.}$$