

Analysis für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 16 (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie: $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n i 2^j \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

(b) Berechnen Sie: $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (3^i + 4^j) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

(c) Zeigen Sie für $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^n i q^i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i q^i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n q^i = \frac{nq^{n+2} - (n+1)q^{n+1} + q}{(q-1)^2} .$$

Aufgabe 17 (4 Punkte)

Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$:

(a) $\min(a, b) = \frac{1}{2} (a + b - |a - b|)$

(b) $\min(a, b) \leq \frac{1}{2} (a + b) \leq \max(a, b)$

(c) $\max(-a, -b) = -\min(a, b)$

Aufgabe 18 (4 Punkte)

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $-1 \leq a_k \leq 0$ für $k = 1, \dots, n$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\prod_{k=1}^n (1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n a_k$$

(b) Sei $n = 2$. Geben Sie ein Beispiel für die Verletzung der obigen Ungleichung, falls lediglich $a_1 \geq -1$ und $a_2 \geq -1$ vorausgesetzt wird.

Aufgabe 19 (4 Punkte)

Sei $s_k(n) = \sum_{i=1}^n i^k$ ($k \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie die Pascalsche Identität:

$$s_k(n) = \frac{1}{k+1} \left((n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} s_j(n) \right) \quad (k \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}) .$$

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\sum_{i=1}^n ((i+1)^{k+1} - i^{k+1}) = (n+1)^{k+1} - 1$ und wenden Sie dann den Binomischen Satz an.)

Bitte wenden!

Aufgabe 20*

- a) Zeigen Sie den in Aufgabe 10 erwähnten Zusammenhang von Multinomialkoeffizienten und bestimmten n -Tupeln.
- b) Zeigen Sie für $l, n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{R}$ den Multinomialsatz:

$$\left(\sum_{i=1}^l x_i \right)^n = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_l = n, \\ k_1, \dots, k_l \in \mathbb{N}_0}} \binom{n}{k_1, \dots, k_l} x_1^{k_1} \dots x_l^{k_l}$$

- c) Berechnen Sie für $n = 2$ und $n = 3$ die Multinomialkoeffizienten und geben Sie in diesen beiden Fällen den Multinomialsatz in ausgeschriebener Form an.

Abgabe zu zweit oder zu dritt: Montag, 26.11.2007 bis 16¹⁵ Uhr,
Übungskasten vor der Bibliothek im 1. Stock

*Diese Zusatzaufgabe soll weitere Anwendungsmöglichkeiten des Vorlesungsstoffes aufzeigen. Sie wird aber nicht korrigiert und ist auch nicht prüfungsrelevant.