

Lösungsvorschläge zu Analysis I für Informatiker

Blatt 3

11. a) (2 + 2 Punkte)

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto (x + 1, x - 1)$ ist injektiv, aber nicht surjektiv:

ad "injektiv":

Zu zeigen ist: $\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x) = f(y) \implies x = y$

Seien also $x, y \in \mathbb{R}$ und $f(x) = f(y)$, d.h.

$(x + 1, x - 1) = (y + 1, y - 1) \implies (x + 1 = y + 1) \wedge (x - 1 = y - 1)$

(wegen Definition der Gleichheit von Tupeln)

$\implies x + 1 = y + 1 \implies x = y \quad \text{q.e.d.}$

ad "nicht surjektiv":

Zu zeigen ist: $\exists y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \forall x \in \mathbb{R} : (y_1, y_2) = y \neq f(x) = (x + 1, x - 1)$

d.h. y liegt nicht in der Wertemenge von f . Da aber für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$x + 1 \neq x - 1$, d.h. die 1. und 2. Komponente in $f(x)$ immer verschieden sind,
reicht es, $y_1 = y_2$ zu wählen:

$\forall y \in \mathbb{R} : (y, y) \neq (x + 1, x - 1) = f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$

$\implies \forall y \in \mathbb{R} : (y, y) \notin f(\mathbb{R}^2) \quad (\text{konkret etwa } y = (0, 0)).$

b) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2 - 1$ ist nicht injektiv, aber surjektiv:

ad "nicht injektiv":

Zu finden sind $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)$ in \mathbb{R}^2 , so daß $g(x_1, x_2) = g(y_1, y_2)$.

Sieht man sich die Zuordnungsvorschrift an, so gilt:

$g(x_1, x_2) = g(y_1, y_2) \iff x_1 + x_2 - 1 = y_1 + y_2 - 1 \iff x_1 + x_2 = y_1 + y_2,$

damit erhält man zum Beispiel durch die Wahl

$$x_1 = y_2$$

$$x_2 = y_1$$

Gleichheit der Bilder. Nun setze man noch $x_1 \neq x_2$, also zum Beispiel:

$a = (0, 1)$ und $b = (1, 0)$

und dann gilt: $a \neq b \quad \wedge \quad g(a) = 1 = g(b)$.

ad "surjektiv":

Es ist zu zeigen: $\forall y \in \mathbb{R} \exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : y = g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1$

Das ist zum Beispiel erfüllt, wenn man setzt:

$$x_1 = y$$

$$x_2 = 1$$

Dann gilt: $g(y, 1) = y + 1 - 1 = y$.

Es existieren also sogar unendlich viele Urbilder zu $y \in \mathbb{R}$.

12. (2 + 2 Punkte)

- a) Seien $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow X$ Abbildungen mit $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$ gegeben. Dann ist f bijektiv:

Nach dem Tutorium gilt: $g \circ f$ injektiv $\implies f$ injektiv

(Zur Erinnerung: $\forall a, b \in X : f(a) = f(b) \implies (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(f(b)) = (g \circ f)(b) \xrightarrow{g \circ f \text{ injektiv}} a = b$)

Da hier nun die Abbildung id_X natürlich injektiv ist, folgt damit aus $g \circ f = id_X$, daß f injektiv ist.

Wieder nach Tutorium gilt: $f \circ g$ surjektiv $\implies f$ surjektiv

(Zur Erinnerung: Zu jedem $y \in Y$ gibt es wegen $f \circ g$ surjektiv ein $a \in Y$ mit $(f \circ g)(a) = y$. Wähle also $x := g(a) \in X$. Dann folgt:

$$f(x) = f(g(a)) = (f \circ g)(a) = y)$$

Da die Identitätsabbildung id_Y nach Vorlesung surjektiv ist, folgt damit aus $f \circ g = id_Y$, daß f surjektiv ist, insgesamt also f bijektiv.

Nach Satz 0.20 der Vorlesung ist aber die Umkehrfunktion durch die Eigenschaften $f \circ f^{-1} = id_Y$ und $f^{-1} \circ f = id_X$ schon eindeutig bestimmt, weshalb also $g = f^{-1}$ gelten muß.

- b) Um zu zeigen, da dieses f eine Umkehrfunktion besitzt, wenden wir Teil a) an und suchen eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $g \circ f = f \circ g = id_{\mathbb{R}^2}$.

Dazu ist zu jedem $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ein Paar $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ zu finden mit

$(y_1, y_2) = f(x_1, x_2)$, d.h. ein Urbild zu (y_1, y_2) unter f , das dann das Bild von (y_1, y_2) unter der Umkehrfunktion f^{-1} ist. Es gilt:

$$(y_1, y_2) = f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - 1) \iff (y_1 = x_1 + x_2) \wedge (y_2 = x_1 - 1).$$

Es ist also das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & x_2 = y_1 \\ x_1 & - & 1 = y_2 \end{array}$$

zu lösen. Durch Auflösen der zweiten Gleichung nach x_1 und Einsetzen in die erste Gleichung folgt sofort:

$$x_1 = y_2 + 1 \implies x_2 = y_1 - x_1 = y_1 - (y_2 + 1) = y_1 - y_2 - 1$$

Definiere also:

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (y_1, y_2) \mapsto (y_2 + 1, y_1 - y_2 - 1)$$

und verifiziere, daß dies die gesuchte Umkehrfunktion ist:

$$\begin{aligned} \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : (f \circ g)(y_1, y_2) &= f(y_2 + 1, y_1 - y_2 - 1) \stackrel{\text{Def. } f}{=} \\ &= ((y_2 + 1) + (y_1 - y_2 - 1), (y_2 + 1) - 1) = (y_1, y_2) = id_{\mathbb{R}^2}(y_1, y_2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (g \circ f)(x_1, x_2) &= g(x_1 + x_2, x_1 - 1) \stackrel{\text{Def. } g}{=} \\ &= ((x_1 - 1) + 1, (x_1 + x_2) - (x_1 - 1) - 1) = (x_1, x_2) = id_{\mathbb{R}^2}(x_1, x_2) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

13. (4 Punkte) Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung.

a) $\forall A, B \subset X : f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Wir verwenden die:

Definition: $C \subset X \implies f(C) = \{f(c) \mid c \in C\} = \{y \in Y \mid \exists c \in C : y = f(c)\}$

Tautologie: (*) $[\exists x (\mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(x))] \text{ logisch äquivalent } (\exists x : \mathcal{A}(x)) \vee (\exists x : \mathcal{B}(x))$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 y \in f(A \cup B) &\stackrel{\text{Def.}}{\iff} \exists c \in A \cup B : y = f(c) \\
 &\stackrel{\text{Def. } \cup}{\iff} \exists c \in X : (c \in A \vee c \in B) \wedge (y = f(c)) \\
 &\iff \exists c \in X : [c \in A \wedge y = f(c)] \vee [c \in B \wedge y = f(c)] \\
 &\stackrel{(*)}{\iff} [\exists c \in X : (c \in A \wedge y = f(c))] \vee [\exists c \in X : c \in B \wedge y = f(c)] \\
 &\stackrel{\text{Def.}}{\iff} (y \in f(A)) \vee (y \in f(B)) \\
 &\stackrel{\text{Def. } \cup}{\iff} y \in f(A) \cup f(B)
 \end{aligned}$$

b) $\forall A, B \subset X : f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

$$\begin{aligned}
 y \in f(A \cap B) &\stackrel{\text{Def.}}{\iff} \exists c \in A \cap B : y = f(c) \\
 &\stackrel{\text{Def. } \cap}{\iff} \exists c \in X : (c \in A) \wedge (c \in B) \wedge (y = f(c)) \\
 &\iff \exists c \in X : (c \in A \wedge y = f(c)) \wedge (c \in B \wedge y = f(c)) \\
 (**) \quad &\implies [\exists c \in X : (c \in A \wedge y = f(c))] \wedge [\exists c \in X : (c \in B \wedge y = f(c))] \\
 &\iff [\exists c \in A : y = f(c)] \wedge [\exists c \in B : y = f(c)] \\
 &\stackrel{\text{Def.}}{\iff} (y \in f(A)) \wedge (y \in f(B)) \\
 &\stackrel{\text{Def. } \cap}{\iff} y \in f(A \cap B)
 \end{aligned}$$

Wie man sieht, ist die Äquivalenzkette nur an der Stelle (**) unterbrochen. Das liegt daran, daß in der aussagenlogischen Tautologie

$$\exists x : [\mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x)] \stackrel{(***)}{\implies} [\exists x : \mathcal{A}(x)] \wedge [\exists x : \mathcal{B}(x)]$$

in (***) eben nur " \implies ", aber nicht " \iff " gilt.

c) $f \text{ injektiv} \iff \forall A, B \subset X : f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

Es ist eine Äquivalenz zu beweisen, d.h. " \implies " und " \impliedby ".

Zu " \implies ":

Es sei f injektiv. Wegen Teil (b) ist für $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ nur noch die Inklusion " \supset " zu zeigen.

Es sei also $y \in f(A) \cap f(B) \implies y \in f(A) \wedge y \in f(B)$

$$\stackrel{\text{Def.}}{\implies} (\exists a \in A : y = f(a)) \wedge (\exists b \in B : y = f(b)).$$

Damit aber gilt $y = f(a)$ und $y = f(b) \implies f(a) = f(b) \stackrel{f \text{ injektiv}}{\implies} a = b \in A \cap B \implies$

$$\exists a \in A \cap B : y = f(a) \stackrel{\text{Def.}}{\implies} y \in f(A \cap B).$$

Zu " \Leftarrow ":

Es gelte $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Zu zeigen ist: $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

Seien also $x_1, x_2 \in X$ und $f(x_1) = f(x_2)$. Wähle $A := \{x_1\}$ und $B := \{x_2\}$; dann sind

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A = \{x_1\}\} = \{f(x_1)\}$$

$$f(B) = \{f(b) \mid b \in B = \{x_2\}\} = \{f(x_2)\} \quad (**)$$

Also:

$$f(x_1) = f(x_2) \in f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) \stackrel{\text{Def.}}{\implies} \exists c \in A \cap B : f(x_1) = f(c),$$

also insbesondere

$$\exists c \in A \cap B = \{x_1\} \cap \{x_2\} \implies c \in \{x_1\} \wedge c \in \{x_2\} \implies x_1 = c = x_2 \quad \text{q.e.d.}$$

Alternativ: (ab (**))

Wegen $f(x_1) = f(x_2)$ ist $f(A) = f(B) \implies f(x_1) \in f(A) = f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$. Damit aber ist $f(A \cap B) \neq \emptyset$, weshalb wegen $f(\emptyset) = \{f(x) \mid x \in \emptyset\} = \emptyset$ folgt: $A \cap B \neq \emptyset$. Also: $\exists c \in \{x_1\} \cap \{x_2\} \implies x_1 = c = x_2 \quad \text{q.e.d.}$

14. Nach Vorlesung gilt: $\forall a, b \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}_0 : (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (*)$

a) Sei $n \in \mathbb{N}_0$; dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \cdot \underbrace{1^{n-k}}_{=1} \stackrel{(*)}{=} ((-1) + 1)^n = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}_0$; dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} 2^{k+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \underbrace{2^{k+1}}_{=2 \cdot 2^k} + \underbrace{2^{n+2}}_{=(\binom{n+1}{n+1}) 2^{(n+1)+1}} - 2^{n+2} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot 2 \cdot 2^k - 2^{n+2} \\ &\stackrel{\text{distributiv}}{=} 2 \cdot \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 2^k \cdot 1^{(n+1)-k} - 2^{n+2} \\ &\stackrel{(*)}{=} 2 \cdot (2+1)^{n+1} - 2^{n+2} = 2 \cdot 3^{n+1} - 2^{n+2} \\ &= 2 \cdot (3^{n+1} - 2^{n+1}) \end{aligned}$$

c) Sei $n \in \mathbb{N}$; dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + 1 \right) 3^k &= -2 + \underbrace{2}_{= \left(\binom{n}{0} + 1 \right) \cdot 3^0} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + 1 \right) 3^k \\
&= -2 + \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} + 1 \right) 3^k \\
&= -2 + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k + \sum_{k=0}^n 3^k \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k \cdot 1^{n-k} + \sum_{k=0}^n 3^k - 2 \\
&\stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} \stackrel{(*)}{(3+1)^n + \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} - 2} \\
&= 4^n + \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1) - 2 \\
&= 4^n + \frac{1}{2}(3^{n+1} - 5)
\end{aligned}$$

Dabei wurden beim dritten Gleichheitszeichen das Assoziativ- und das Kommutativgesetz verwendet.

d) Zunächst gilt:

$$\forall 2 \leq k \leq n : \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{k \cdot (k-1) \cdot ((n-2) - (k-2))!} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)} \binom{n-2}{k-2} \quad (**)$$

Damit folgt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} &= 0 + 0 + \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} \\
&\stackrel{(**)}{=} \sum_{k=2}^n k(k-1) \cdot \frac{n(n-1)}{k(k-1)} \binom{n-2}{k-2} \\
&= n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} \\
&= n(n-1) \sum_{2 \leq k \leq n} \binom{n-2}{k-2} \\
&= n(n-1) \sum_{0 \leq k-2 \leq n-2} \binom{n-2}{k-2} \\
&\stackrel{l:=k-2}{=} n(n-1) \sum_{l=0}^{n-2} \binom{n-2}{l} \\
&= n(n-1) \sum_{l=0}^{n-2} \binom{n-2}{l} 1^l \cdot 1^{n-2-l} \\
&\stackrel{(*)}{=} n(n-1) 2^{n-2}
\end{aligned}$$

15. a) Ein Pascal-Programm

```

(* Schnelles Potenzieren *)
program potenz (input,output);
label 99;
var z,k,n,p : integer;
begin
  write('n und k eingeben: ');
  readln(n,k); writeln;
  if k<0 then
    begin
      writeln('Ungeeignete Daten eingegeben!');
      goto 99;
    end;
  write(n,'^',k,' = ');
  p:=1;
  repeat
    z:=k mod 2;
    k:=k div 2;
    if z=1 then p:=x*p;
    if k<>0 then n:=n*n;
  until k=0;
  writeln(p); writeln;
99: (* Fehlerausgang *)
end.

```

- b) Die maximale Zahl an Multiplikationen muss man durchführen, wenn die k_i alle gleich 1 ($1 \leq i \leq m$). Um n^{2^i} ($i = 1, \dots, m$) zu berechnen, ist m -maliges Quadrieren notwendig, also m Multiplikationen. Hinzu kommen noch m Multiplikationen (da das Produkt aus $m + 1$ Faktoren besteht). Folglich ist die maximale Zahl der Multiplikationen $2m$.

Für $2^m \leq k \leq 2^{m+1} - 1$ ist an der $m + 1$ -sten Stelle ein Bit gesetzt, die anderen sind beliebig, d.h. wir haben für m Stellen noch Freiheiten. Der Aufwand zum Berechnen von n^{2^m} ist immer derselbe, nämlich m Multiplikationen. Sind j Bits auf den Positionen $1, \dots, m$ gesetzt, so hat das Produkt $j + 1$ Faktoren $\neq 1$. Daher sind in diesem Fall j Multiplikationen zur Auswertung des Produkts notwendig, insgesamt $m + j$ Multiplikationen. Es gibt $\binom{m}{j}$ Zahlen k , in denen auf den Positionen $1, \dots, m$ j Bits gesetzt sind. Als Durchschnitt ergibt sich somit

$$\frac{\sum_{j=0}^m (m+j) \binom{m}{j}}{\sum_{j=0}^m \binom{m}{j}} = \frac{m2^m + m2^{m-1}}{2^m} = \frac{3}{2}m.$$

Für $0 \leq k \leq 2^{m+1} - 1$ ergibt sich durch das gewichtete arithmetische Mittel hieraus, dass die durchschnittliche Zahl der Multiplikationen

$$\frac{\sum_{i=0}^m \frac{3}{2} i 2^i}{\sum_{i=0}^m 2^i} = \frac{\frac{3}{2} (m2^{m+2} - (m+1)2^{m+1} + 2)}{2^{m+1} - 1} \approx \frac{3}{2}(m-1)$$

beträgt.

Wegen $k = \sum_{i=0}^m k_i 2^i$ ($k_m \neq 0$) gilt $2^m \leq k \leq 2^{m+1} \implies m \leq \log_2(k) \leq m+1$.

Also ist $\frac{3}{2}(m-1) \leq \frac{3}{2} \log_2(k)$. Für große k wird damit die Anzahl der auszuführenden Multiplikation, die mit $\log_2(k)$ wächst, sehr viel kleiner sein als k :

Es ist $\log_2(k) \ll k$ für große k .