

**Lösungsvorschläge zu Analysis I für Informatiker**

**Blatt 11**

51. (4 Punkte)

Im Folgenden werden die Konvergenzradien der Potenzreihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  bestimmt:

(a) **Behauptung:** Mit  $a_k := \frac{(-1)^k}{k+1}$  gilt:  
die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$  hat den Konvergenzradius  $R = 1$ .

Beweis:

Mit **Quotientenkriterium:**  $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k+1}{k+2} = 1 - \frac{1}{k+2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1 \xrightarrow[\text{Satz 3.16) }]{\text{VL}}$

$$R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|} = \frac{1}{1} = 1.$$

Mit **Wurzelkriterium:**  $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left| \frac{(-1)^k}{k+1} \right|} = \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}}$

Nun gilt:  $\forall k \in \mathbb{N} : k < k+1 \leq k+k = 2k \implies$

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt[k]{k} & < & \sqrt[k]{k+1} & \leq & \sqrt[k]{2k} = \underbrace{\sqrt[k]{2} \cdot \sqrt[k]{k}} \\ \downarrow k \rightarrow \infty & & & & \downarrow k \rightarrow \infty \\ 1 & & & & 1 \end{array}$$

also folgt nach dem Sandwich-Lemma:

$$\sqrt[k]{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1 \implies R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{1} = 1$$

(b) **Behauptung:** Mit  $a_k := (k^3 + 1)3^{k+1}$  gilt:

die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (k^3 + 1)3^{k+1}$  hat den Konvergenzradius  $R = \frac{1}{3}$ .

Beweis:

**Quotientenkriterium:**

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{((k+1)^3 + 1) \cdot 3^{k+2}}{(k^3 + 1) \cdot 3^{k+1}} = \frac{((k+1)^3 + 1)}{k^3 + 1} \cdot 3 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k^{\cancel{x}} \cdot \left( \left(1 + \frac{1}{k}\right)^3 + \frac{1}{k^3} \right)}{k^{\cancel{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{k^3}\right)} \cdot 3 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{(1+0)^3 + 0}{1+0} \cdot 3 = 3 \implies \\
&\implies R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

**Wurzelkriterium:**

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{k^3 + 1} \cdot \sqrt[k]{3 \cdot 3^k} = \sqrt[k]{k^3 + 1} \cdot \sqrt[k]{3} \cdot 3$$

Nun gilt:  $\forall k \in \mathbb{N} : k^3 < k^3 + 1 \leq k^3 + k^3 = 2k^3 \implies$

$$\begin{array}{ccccc}
\sqrt[k]{k^3} & < & \sqrt[k]{k^3 + 1} & & \leq & \underbrace{\sqrt[k]{2k^3} = \sqrt[k]{2} \cdot \sqrt[k]{k^3}} \\
\downarrow k \rightarrow \infty & & & & & \downarrow k \rightarrow \infty \\
1 & & & & & 1
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&\xRightarrow[\text{Lemma}]{\text{Sandwich-}} \sqrt[k]{k^3 + 1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1 \implies \sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{k^3 + 1} \cdot \sqrt[k]{3} \cdot 3 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3 \implies \\
&R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(c) **Behauptung:** Mit  $a_k := k^k$  gilt:

die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} k^k$  hat den Konvergenzradius  $R = 0$ .

Beweis:

**Quotientenkriterium:**

$$\begin{aligned}
\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} = \frac{(k+1)^k}{k^k} \cdot (k+1) = \left( \frac{k+1}{k} \right)^k \cdot (k+1) = \\
&= \left( 1 + \frac{1}{k} \right)^k \cdot (k+1) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} e \cdot \infty = \infty \quad (\text{da } e > 0) \implies R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|} = \frac{1}{\infty} \stackrel{\text{Def. VL}}{=} 0
\end{aligned}$$

**Wurzelkriterium:**

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{k^k} = k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty \implies R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\infty} \stackrel{\text{wie oben}}{=} 0$$

(d) **Behauptung:** Mit  $a_k := \frac{k^k}{k!}$  gilt:

die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$  hat den Konvergenzradius  $R = \frac{1}{e}$ .

Beweis:

**Quotientenkriterium:**

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k^k} = \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} \cdot \frac{k!}{(k+1)!} = \left( \frac{k+1}{k} \right)^k \cdot (k+1) \cdot \frac{1}{k+1} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} e \implies R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|} = \frac{1}{e}$$

**Wurzelkriterium:**

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{k^k}{k!}} = \frac{k}{\sqrt[k]{k!}}$$

$$\begin{aligned} \text{Nun gilt nach Aufgabe (38)b) : } \frac{\sqrt[k]{k!}}{k} &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \implies \frac{k}{\sqrt[k]{k!}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} e \implies \\ \implies R &= \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

52. (4 Punkte)

(a) **Behauptung:** Für  $m \in \mathbb{N}_0$  hat die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k}{k} x^k$  den Konvergenzradius  $R = 1$ .

Beweis:

$$\text{Hier ist } a_k = \binom{m+k}{k} = \frac{(m+k)!}{k! \cdot (m+k-k)!} = \frac{(m+k)!}{k! \cdot m!}.$$

Dann liefert das Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{(m+(k+1))!}{(k+1)! \cdot m!} \cdot \frac{k! \cdot m!}{(m+k)!} = \frac{m+k+1}{k+1} = \frac{m}{k+1} + 1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$$

(denn  $m \in \mathbb{N}_0$  ist konstant).

(b) **Behauptung:** Für jedes  $m \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$\frac{1}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k}{k} x^k \quad (|x| < 1).$$

Beweis:

Durch Induktion nach  $m \in \mathbb{N}_0$  :

Es gilt für beliebige absolut konvergente Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ , daß das sogenannte Cauchyprodukt der beiden Reihen ebenfalls absolut konvergiert, d.h.

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) \quad (*)$$

Induktionsanfang  $m = 0$  :

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x| < 1 \implies \frac{1}{(1-x)^{0+1}} = \frac{1}{1-x} \stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{0+k}{k} x^k$$

q.e.d.

Induktionsschritt  $m \rightarrow m+1$  :

Induktionsvoraussetzung:

Es gelte für ein  $m \in \mathbb{N}_0$  :  $\frac{1}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k}{k} x^k \quad (|x| < 1)$ .

Dann folgt wegen der absoluten Konvergenz der Potenzreihen:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(1-x)^{m+2}} &= \frac{1}{(1-x)^{m+1}} \cdot \frac{1}{1-x} \stackrel{\substack{\text{Reihen} \\ \text{konverg.} \\ \text{IV}}}{=} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\binom{m+k}{k} x^k}_{=: a_k} \right) \cdot \overbrace{\left( \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right)}^{\text{geom. Reihe}} \stackrel{(*)}{=} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} \underbrace{x^k \cdot x^{n-k}}_{= x^n} \right) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left( \sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} \right)}_{\substack{\text{Aufg. 26b} \\ \binom{m+n+1}{n}}} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n+1}{n} x^n \stackrel{\substack{\text{Index} \\ \text{umbenennen}}}{=} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k+1}{k} x^k = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{(m+1)+k}{k} x^k \quad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

53. (4 Punkte)

Für die folgende Aufgabe brauchen wir einige Aussagen der Vorlesung über Grenzwerte:

( $\alpha$ ) Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und sind  $a, G \in [-\infty, \infty]$ , so ist der Grenzwert  $G$  von  $f$  bei  $a$  definiert durch:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = G \iff$  Für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in D$  und  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$  gilt, daß  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G$ .

Dabei wird vorausgesetzt, daß eine solche Folge existiert.

( $\beta$ ) Ist zusätzlich  $a \in D$ , so heißt  $f$  stetig in  $a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

( $\gamma$ ) Seien  $a > 1, \beta \geq 0$ ; dann gilt:

$$0 < x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \implies \frac{1}{x_n^\beta} a^{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

( $\delta$ )  $k \in \mathbb{N}_0, a > 1$  und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \implies x_n^k a^{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

( $\epsilon$ )  $a > 1, \beta > 0$  und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \implies \frac{\log_a(x_n)}{x_n^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

( $\zeta$ ) Für Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  und  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$  gilt:  $a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$

(a) **Behauptung:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}e^x - xe^{-x}}{\frac{1}{x}e^x + xe^{-x}} = 1$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}e^x - xe^{-x}}{\frac{1}{x}e^x + xe^{-x}} = 1$

Beweis:

Sei zunächst  $x \neq 0$ . Dann:

$$\frac{\frac{1}{x}e^x - xe^{-x}}{\frac{1}{x}e^x + xe^{-x}} = \frac{\frac{1}{x} \cdot (e^x - x^2e^{-x})}{\frac{1}{x} \cdot (e^x + x^2e^{-x})} = \frac{e^x - x^2e^{-x}}{e^x + x^2e^{-x}}.$$

Nun ist nach Vorlesung (4.3) die Exponentialfunktion auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig, ebenso alle Polynome sowie Summen und Produkte stetiger Funktionen. Damit sind die Funktionen  $g(x) := e^x - x^2e^{-x}$  und  $h(x) := e^x + x^2e^{-x}$  auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig, und da  $g(0) = h(0) = 1 \neq 0$ , liefert wieder Satz (4.3), daß auch die Funktion  $\frac{g}{h}$  in 0 stetig ist, also:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}e^x - xe^{-x}}{\frac{1}{x}e^x + xe^{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{h(x)} \stackrel{\text{stetig in 0}}{=} \frac{g(0)}{h(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

Für den Grenzwert bei  $a = \infty$  formen wir anders um:

$$\frac{\frac{1}{x}e^x - xe^{-x}}{\frac{1}{x}e^x + xe^{-x}} = \frac{\frac{1}{x}e^x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{e^{2x}}\right)}{\frac{1}{x}e^x \cdot \left(1 + \frac{x^2}{e^{2x}}\right)}$$

Wegen  $(\gamma)$  oben gilt für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ :

$$\frac{e^{x_n}}{x_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad (\text{setze in } (\gamma) \ a := e \text{ und } \beta := 2) \implies \frac{e^{2x_n}}{x_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

(da auch  $e^{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ ).

Weil mit Vorlesung (2.25) für jede Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $0 \neq y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm \infty$  gilt, daß

$\frac{1}{y_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , folgt hier:

$$\frac{x_n^2}{e^{2x_n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies \frac{1 - \frac{x_n^2}{e^{2x_n}}}{1 + \frac{x_n^2}{e^{2x_n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

Weil das nun für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \rightarrow \infty$  gilt, folgt mit der Definition des

Grenzwerts in  $(\alpha)$ :  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}e^x - xe^{-x}}{\frac{1}{x}e^x + xe^{-x}} = 1$

(b) **Behauptung:**  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{x}} = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$

Beweis:

Nach Definition ist  $x^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(x)\right)$ .

Nun gilt nach Vorlesung (2.26):  $0 < x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies \ln(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$  und

$$\frac{1}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \stackrel{(\zeta)}{\implies} \frac{\ln(x_n)}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \stackrel{(\delta)}{\implies} \exp\left(\frac{\ln(x_n)}{x_n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Da dies für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gilt mit  $0 < x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  folgt aus  $(\alpha)$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{x}} = 0$  q.e.d.

Untersuchen wir nun den Grenzwert für  $a = \infty$  :

Sei dazu  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \xRightarrow{(\epsilon)} \frac{\ln(x_n)}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies$   
 $\xRightarrow{(\beta)} \exp\left(\frac{1}{x_n} \ln(x_n)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(0) = 1.$

Da dies wieder für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  gilt, folgt aus  $(\alpha)$  :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{x} \ln(x)\right) = 1 \quad \text{q.e.d.}$$

(c) **Behauptung:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \infty$ .

Beweis:

Bei  $a = 0$  : Für alle  $0 \neq x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} (e^x - 1 - x) &\stackrel{\text{Exponential-}}{\underset{\text{reihe}}{=}} \frac{1}{x^2} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) - 1 - x \right) \stackrel{\text{Grenzwert-}}{\underset{\text{sätze}}{=}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x^2} \left( \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - 1 - x \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x^2} \left( 1 + x + \sum_{k=2}^n \frac{x^k}{k!} - 1 - x \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x^2} \sum_{k=2}^n \frac{x^k}{k!} \right) \stackrel{\text{Indextransf.}}{\underset{l:=k-2 \iff k=l+2}{=}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x^2} \sum_{l=0}^{n-2} \frac{x^{l+2}}{(l+2)!} \right) = \\ &\stackrel{\frac{x^2}{\text{kürzen}}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{n-2} \frac{x^l}{(l+2)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+2)!} \end{aligned}$$

Diese Potenzreihe hat tatsächlich den Konvergenzradius  $R = \infty$ , denn:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{(k+2)!}{((k+1)+2)!} = \frac{(k+2)!}{(k+3)!} = \frac{1}{k+3} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \xRightarrow{\text{VL}} R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|} = \infty. \text{ Mit}$$

obigem ist also für alle  $0 \neq x \in \mathbb{R}$   $f(x) := \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$  die Summenfunktion der

Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+2)!}$ , d.h.  $\forall 0 \neq x \in \mathbb{R} : f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+2)!}$ ; andererseits gilt mit Vorlesung Satz (3.18) und (4.2), daß Potenzreihen in ihrem Konvergenzbereich stetig sind, also:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+2)!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{(k+2)!} \stackrel{0^k=0}{\underset{\text{für } k \neq 0}{=}} \frac{0^0}{(0+2)!} = \frac{1}{2}$$

Falls  $a = \infty$  :

Für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  gilt:

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \xRightarrow[\text{(2.25)}]{\text{Vorl.}} \frac{x_n}{x_n^2} = \frac{1}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies -\frac{1+x_n}{x_n^2} = -\frac{1}{x_n^2} - \frac{x_n}{x_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Andererseits gilt : } \frac{e^{x_n}}{x_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \xRightarrow{(\gamma)} \frac{e^{x_n} - 1 - x_n}{x_n^2} = \frac{e^{x_n}}{x_n^2} - \frac{1+x_n}{x_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

und da das für jede solche Folge gilt, liefert  $(\alpha)$  :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \infty \quad \text{q.e.d.}$$

**54. Behauptung:** Sei  $a > 0$  ; dann ist die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} \ln(a) & \text{falls } x = 0 \\ \frac{a^x - 1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \end{cases} \quad \text{stetig.}$$

Beweis: Entwickeln wir wieder die Funktion  $f$  für  $x \neq 0$  in eine Potenzreihe:

$$\begin{aligned} \frac{a^x - 1}{x} &\stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{1}{x} (\exp(x \ln(a)) - 1) = \\ &= \frac{1}{x} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x \ln(a))^k}{k!} - 1 \right) = \frac{1}{x} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x \ln(a))^k}{k!} - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x \ln(a))^k}{k!} \stackrel{\text{Index-}}{\stackrel{\text{transf.}}{=}} \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x \ln(a))^{k+1}}{(k+1)!} = \\ &\stackrel{x}{\stackrel{\text{kürzen}}{=}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln(a)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot x^k \end{aligned}$$

Die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln(a)^{k+1}}{(k+1)!} x^k$  hat den Konvergenzradius  $R = \infty$  :

Falls  $a \neq 1$  :

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{\ln(a)^{k+2} \cdot (k+1)!}{(k+2)! \cdot \ln(a)^{k+1}} = \frac{\ln(a)}{k+2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \implies R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|} \stackrel{\text{Vorl.}}{=} \infty$$

Falls  $a = 1$  : dann ist  $\ln(a) = 0$  , und dann:

$\forall 0 \neq x \in \mathbb{R} : a^x = 1^x = 1 \implies f(x) = \frac{a^x - 1}{x} = 0$  , d.h. die Funktion  $f$  ist die Nullfunktion und damit stetig. Interessant ist also nur der Fall  $a \neq 1$  .

Mit Vorlesung Satz (3.18) und (4.2) ist die Summenfunktion der Potenzreihe in ihrem Konvergenzbereich, also in ganz  $\mathbb{R}$ , stetig, also:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln(a)^{k+1}}{(k+1)!} x^k \stackrel{\text{stetig}}{\stackrel{\text{in 0}}{=}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln(a)^{k+1}}{(k+1)!} 0^k \stackrel{\text{nur } k=0}{\stackrel{\text{interessant}}{=}} \\ &= \frac{\ln(a)^1}{1!} 0^0 = \ln(a) = f(0) \quad (**) \end{aligned}$$

Nach Vorlesung Satz (3.18) und (4.2) ist damit die Funktion  $f$  in den Punkten  $x \neq 0$  stetig als Summenfunktion der stetigen Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln(a)^{k+1}}{(k+1)!} x^k$ , und im Punkt  $x = 0$  stetig wegen  $(**)$  und  $(\beta)$ . q.e.d.

55. (a) **Behauptung:** In der Potenzreihendarstellung

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \quad (0 < |x| < r \text{ für ein } r > 0)$$

stimmen die Koeffizienten  $B_k$  mit den Bernoulli-Zahlen überein.

Beweis:

Nach Vorlesung (1.14)e) sind die Bernoulli-Zahlen wie folgt definiert:

$$a_0 := 1, \quad a_{n+1} := -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k} a_k \quad (n \in \mathbb{N}_0) \quad (\clubsuit)$$

$$\text{d.h. } a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{6}, \dots$$

Im Konvergenzbereich  $] -R, R[$  der Potenzreihe, d.h für alle  $x \in ] -R, R[$  gilt dann: (wegen der absoluten Konvergenz der Potenzreihen (und auch für  $x = 0$ !))

$$\begin{aligned} x &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \right) \cdot (e^x - 1) \stackrel{\text{Exponential-}}{\underset{\text{reihe}}{=}} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1 \right) = \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \right) \cdot \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1 \right) = \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \stackrel{\text{Index-}}{\underset{\text{transf.}}{=}} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{B_k}{k!} x^k}_{=: a_k} \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}_{=: b_k} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{Cauchy-}}{\underset{\text{produkt}}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!} x^k \cdot \frac{x^{(n-k)+1}}{((n-k)+1)!} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \left( \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k! \cdot (n+1-k)!} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \left( \sum_{k=0}^n B_k \cdot \frac{1}{(n+1)!} \cdot \underbrace{\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}}_{= \binom{n+1}{k}} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n+1)!} B_k \binom{n+1}{k} \right) = \\ &\stackrel{\text{Indextr.}}{\underset{n \rightarrow n-1}{=}} \sum_{n=1}^{\infty} x^n \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n!} B_k \binom{n}{k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n!} B_k \binom{n}{k} \right) \quad (\text{rückläufige Summe bei } n = 0) \end{aligned}$$



Nun ist natürlich auch

$$\forall x \in \mathbb{R} : x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

eine Darstellung des Polynoms  $f(x) := x$  als konvergente Potenzreihe, wobei definiert wird:

$$c_n := \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq 1 \\ 1 & \text{für } n = 1 \end{cases} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

Die Grenzwerte dieser Potenzreihen stimmen für alle  $x \in ]-r, r[$  ( $r > 0$ ) überein, weshalb der Identitätssatz für Potenzreihen (Vorlesung (3.20)) liefert:

$$0 = c_0 = \sum_{k=0}^{0-1} \frac{1}{0!} B_k \binom{0}{k} \quad (= 0 \text{ als rückläufige Summe})$$

$$1 = c_1 = \sum_{k=0}^{1-1=0} \frac{1}{1!} B_k \binom{1}{k} = \frac{1}{1!} B_0 \binom{1}{0} = B_0 \implies B_0 = 1$$

$$0 = c_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n!} B_k \binom{n}{k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} B_k \binom{n}{k} \quad \text{für alle } n \geq 2$$

$$\text{Also gilt für alle } n \geq 2 : \sum_{k=0}^{n-1} B_k \binom{n}{k} = 0 \quad (**)$$

Insbesondere für  $n+2$  statt  $n$  folgt:

$$0 = \sum_{k=0}^{n+1} B_k \binom{n+2}{k} = B_{n+1} \underbrace{\binom{n+2}{n+1}}_{= n+2} + \sum_{k=0}^n B_k \binom{n+2}{k} \implies$$

$$B_{n+1} \cdot (n+2) = - \sum_{k=0}^n B_k \binom{n+2}{k} \implies$$

$$B_{n+1} = - \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^n B_k \binom{n+2}{k}$$

und dies ist mit  $B_0 = 1$  gerade die Rekursionsvorschrift für die Bernoulli-Zahlen gemäß ( $\clubsuit$ ). Da jede solche Rekursionsvorschrift eine eindeutig bestimmte Folge liefert, ist  $a_k = B_k$ , d.h. die  $B_k$  sind die Bernoulli-Zahlen. q.e.d.

(b) **Behauptung:** Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $1 + e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) ist die erzeugende Funktion der Folge  $\left( \frac{0^k + 1^k + 2^k + \dots + n^k}{k!} \right)_{k \in \mathbb{N}_0}$ , d.h. es ist:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sum_{j=0}^n e^{jx} = 1 + e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k + 1^k + 2^k + \dots + n^k}{k!} \cdot x^k$$

Beweis:

Definiere  $a_k := \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^n j^k$ . Dann:

Für jedes  $0 \leq j \leq n$  ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k}{k!} x^k$  auf ganz  $\mathbb{R}$  konvergent

(für  $j = 0$  klar, für  $j > 0$  z. B. Quotientenkriterium:

$$\frac{j^{k+1} \cdot k!}{(k+1)! \cdot j^k} = \frac{j}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \xrightarrow[\text{(3.16)}]{\text{Vorl.}} R = \infty), \text{ also:}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k + 1^k + 2^k + \dots + n^k}{k!} \cdot x^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n \frac{j^k}{k!} \right) \cdot x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n \frac{j^k}{k!} x^k \right) = \\ &\stackrel{\text{jede Reihe konvergent}}{=} \sum_{j=0}^n \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k}{k!} x^k \right) \\ &= \sum_{j=0}^n \underbrace{\left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jx)^k}{k!} \right)}_{= e^{jx}} \\ &= \sum_{j=0}^n e^{jx} \quad \text{q.e.d} \end{aligned}$$

(c) **Behauptung:**  $\forall \mathbb{R} \ni x \neq 0 : \frac{e^{(n+1)x} - 1}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1} = 1 + e^x + \dots + e^{nx} = \sum_{j=0}^n e^{jx}$

Beweis:

Nach Vorlesung gilt für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  :

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \cdot (a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n) = (a - b) \cdot \left( \sum_{j=0}^n a^j b^{n-j} \right) \quad (*)$$

Damit folgt für alle  $x \neq 0$  :

$$\begin{aligned}
\frac{e^{(n+1)x} - 1}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1} &= \frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1} = \frac{(e^x)^{n+1} - 1}{e^x - 1} = \\
&= \frac{(e^x - 1) \cdot \left( \sum_{j=0}^n (e^x)^j 1^{n-j} \right)}{e^x - 1} = \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum_{j=0}^n (e^x)^j = \sum_{j=0}^n e^{jx}
\end{aligned}$$

(d) **Behauptung:**

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \sum_{j=0}^n j^k = 0^k + 1^k + 2^k + \dots + n^k = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k B_i \binom{k+1}{i} (n+1)^{k+1-i}$$

Beweis:

Im Hinweis wurde vorgeschlagen, das Cauchyprodukt der beiden Potenzreihen auf der linken Seite von (c) zu bilden und einen Koeffizientenvergleich vorzunehmen.

Sei nun  $x \neq 0 \implies$  (Potenzreihen sind im Konvergenzbereich absolut konvergent)

$$\begin{aligned}
\frac{e^{(n+1)x} - 1}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1} &= \frac{1}{x} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((n+1)x)^k}{k!} - 1 \right] \cdot \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \right] \\
&= \frac{1}{x} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((n+1)x)^k}{k!} - 1 \right] \cdot \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \right] \\
&= \frac{1}{x} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((n+1)x)^k}{k!} \right] \cdot \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \right] \\
&\stackrel{\text{Index-}}{=} \frac{1}{x} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((n+1)x)^{k+1}}{(k+1)!} \right] \cdot \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \right] \\
&\stackrel{\text{transf.}}{=} \frac{x}{x} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(n+1)^{k+1}}{(k+1)!} x^k}_{= b_k} \right] \cdot \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{B_k}{k!} x^k}_{= a_k} \right] \\
&\stackrel{\text{Cauchy-}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^m a_i b_{m-i} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^m \frac{B_i}{i!} x^i \cdot \frac{(n+1)^{(m-i)+1}}{((m-i)+1)!} x^{m-i} \right) \\
&\stackrel{\text{produkt}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} x^m \left( \sum_{i=0}^m \frac{(n+1)^{m+1-i}}{i!(m+1-i)!} \cdot B_i \right)
\end{aligned}$$

Andererseits haben wir schon in Teil (b) gesehen, daß für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\begin{aligned} 1 + e^x + \dots + e^{nx} &= \sum_{j=0}^n e^{jx} = \sum_{j=0}^n \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(jx)^m}{m!} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n \frac{j^m}{m!} \right) x^m = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^n j^m \right) x^m \end{aligned}$$

Nun führen wir wieder einen Koeffizientenvergleich gemäß Vorlesung (3.20) durch und benutzen dazu die Identität aus Teil (c) :

$$\forall m \in \mathbb{N}_0 : \sum_{i=0}^m \frac{(n+1)^{m+1-i}}{i!(m+1-i)!} B_i = \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^n j^m \xrightarrow[m \text{ durch } k]{\text{ersetze}}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n j^k &= k! \cdot \sum_{i=0}^k \frac{(n+1)^{k+1-i}}{i!(k+1-i)!} B_i = \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{(n+1)^{k+1-i} \cdot k! \cdot (k+1)}{i!(k+1-i)! \cdot (k+1)} B_i = \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \frac{(k+1)!}{i!(k+1-i)!} (n+1)^{k+1-i} B_i = \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k B_i \binom{k+1}{i} (n+1)^{k+1-i} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$