

Lösungen zu Analysis I für Informatiker und Statistiker

Blatt 2

6. ( 4 = 2 + 2 Punkte )

a) Behauptung:  $\left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup M = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup M)$

Wir benötigen aus der Vorlesung die allgemeingültige aussagenlogische Formel

$$(*) \quad ( \forall x \in M : [ \mathcal{A}(x) \vee B ] ) \iff ( \forall x \in M : \mathcal{A}(x) ) \vee B$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} x \in \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup M &\iff ( x \in \bigcap_{i \in I} A_i ) \vee ( x \in M ) && \text{(Def. Durchschnitt)} \\ &\iff ( \forall i \in I : x \in A_i ) \vee ( x \in M ) && \text{(Definition von } \bigcap_{i \in I} ) \\ &\iff \forall i \in I : ( x \in A_i ) \vee ( x \in M ) && \text{(wegen } (*) ) \\ &\iff \forall i \in I : x \in A_i \cup M && \text{(Def. Durchschnitt)} \\ &\iff x \in \bigcap_{i \in I} (A_i \cup M) \end{aligned}$$

b) Dies ist nicht immer richtig, da die aussagenlogische Formel

$$( \forall x \in M : [ \mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(x) ] ) \iff ( \forall x \in M : \mathcal{A}(x) ) \vee ( \forall x \in M : \mathcal{B}(x) )$$

nicht allgemeingültig ist.

Gegenbeispiel:

$$\text{Sei } I = 1, 2 \text{ und } \begin{array}{ll} A_1 = \mathbb{N} & B_1 = \mathbb{Z} \\ A_2 = \mathbb{Z} & B_2 = \mathbb{N} \end{array}$$

$$\text{Damit ist } \bigcap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_2 = \mathbb{N} \text{ und } \bigcap_{i \in I} B_i = B_1 \cap B_2 = \mathbb{N} \text{ und } A_1 \cup B_1 = \mathbb{Z}$$

$$\text{sowie } A_2 \cup B_2 = \mathbb{Z} \implies$$

$$\left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup \left( \bigcap_{i \in I} B_i \right) = \mathbb{N} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N} \implies$$

$$\bigcap_{i \in I} (A_i \cup B_i) = \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \neq \mathbb{N} = \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup \left( \bigcap_{i \in I} B_i \right)$$

7. (4 = 2 + 2 Punkte) Seien  $A, B, C, D$  Mengen.

a) Behauptung:  $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

Wir beweisen die Aussage in zwei Schritten: " $\subseteq$ " und " $\supseteq$ "  
und benutzen die Definition

$$M \times N = \{(u, v) \mid u \in U \wedge v \in V\} = \{x \mid \exists u \in U \exists v \in V : x = (u, v)\}$$

Ad " $\subseteq$ ":

Sei  $x \in (A \times B) \cap (C \times D) \implies$

$$[\exists a \in A \exists b \in B : x = (a, b)] \wedge [\exists c \in C \exists d \in D : x = (c, d)]$$

d.h. es gilt  $(a, b) = x = (c, d) \implies a = c \wedge b = d \implies a \in A \cap C \wedge b \in B \cap D$

also nach Definition des cartesischen Produkts  $x = (a, b) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$  q.e.d

Ad " $\supseteq$ ":

Sei nun  $x \in (A \cap C) \times (B \cap D) \implies \exists u \in A \cap C \exists v \in B \cap D : x = (u, v)$

Nun ist  $u \in A \cap C$ , d.h.  $u \in A \wedge u \in C$  sowie  $v \in B \cap D$ , d.h.  $v \in B \wedge v \in D$

Also nach Definition des cartesischen Produkts:

$$\left. \begin{array}{l} u \in A \wedge v \in B \implies x = (u, v) \in A \times B \\ u \in C \wedge v \in D \implies x = (u, v) \in C \times D \end{array} \right\} \implies x \in (A \times B) \cap (C \times D) \quad \text{q.e.d.}$$

b) Die Gleichung gilt im allgemeinen nicht. Wähle zum Beispiel

$A = \{1\} = B$  und  $C = \{2\} = D$ . Dann folgt

$$A \times B = \{(1, 1)\} \text{ und } C \times D = \{(2, 2)\} \implies (A \times B) \cup (C \times D) = \{(1, 1), (2, 2)\}$$

Andererseits ist  $A \cup B = \{1, 2\} = B \cup D \implies (A \cup C) \times (B \cup D) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

d.h. es gilt  $(A \times B) \cup (C \times D) \subsetneq (A \cup C) \times (B \cup D)$ .

(Die Inklusion  $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$  gilt im übrigen immer.)

8. (4 = 1 + 1 + 2 Punkte)

a) Behauptung:  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (k, n \in \mathbb{N}_0, k \leq n)$

Nach Definition ist  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

Nach dieser Vorschrift wird wegen  $0 \leq n - k \leq n$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

q.e.d.

b) Behauptung:  $\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k} \quad (k, m, n \in \mathbb{N}_0, k \leq m \leq n)$

Wieder mit Definition:

$$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} \stackrel{\text{kürzen}}{=} \frac{n!}{(n-m)!k!(m-k)!}$$

Andererseits ist wegen  $0 \leq m - k \leq n - k$

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!((n-k)-(m-k))!} \stackrel{\text{kürzen}}{=} \frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!}$$

$$\stackrel{s.o.}{=} \binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} \quad \text{q.e.d.}$$

c) Behauptung:  $\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \dots + \binom{2n+1}{n} = 4^n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

Definiere

$$S := \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \dots + \binom{2n+1}{n}. \text{ Dann ist zu zeigen: } S = 4^n.$$

Es gilt nach Tutorium:

$$\begin{aligned} 2^m &= \text{Anzahl der Teilmengen einer m-elementigen Menge} \\ &= \text{Anzahl der 0-elementigen Teilmengen} + \text{Anzahl der 1-elementigen Teilmengen} + \\ &\quad + \dots + \text{Anzahl der m-elementigen Teilmengen} \\ &= \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \dots + \binom{m}{m} \end{aligned}$$

Damit folgt aber:

$$\begin{aligned} 2^{2n+1} &= \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \dots + \binom{2n+1}{2n} + \binom{2n+1}{2n+1} = \\ &= \underbrace{\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \dots + \binom{2n+1}{n}}_{= S} + \underbrace{\binom{2n+1}{n+1} + \dots + \binom{2n+1}{2n} + \binom{2n+1}{2n+1}}_{= T} \\ &= S + T \end{aligned}$$

Nun gilt für die Summanden in  $T$  unter Verwendung von Aufgabenteil a):

$$\begin{aligned} \binom{2n+1}{n+1} &= \binom{2n+1}{2n+1-(n+1)} = \binom{2n+1}{n} \\ \binom{2n+1}{n+2} &= \binom{2n+1}{2n+1-(n+2)} = \binom{2n+1}{n-1} \\ &\vdots \\ \binom{2n+1}{2n} &= \binom{2n+1}{2n+1-2n} = \binom{2n+1}{1} \\ \binom{2n+1}{2n+1} &= \binom{2n+1}{2n+1-(2n+1)} = \binom{2n+1}{0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = S$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 4^n = 2 \cdot 2^{2n} = 2^{2n+1} = S + T = 2S \quad \text{nach oben}$$

$$\Rightarrow S = 4^n \quad \text{q.e.d.}$$

9. (4 Punkte)

Mit den Bezeichnungen der Aufgabe:

$$\begin{array}{ll} f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, & f_1(x) = \frac{x}{2}, \\ f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, & f_2(x) = x^2, \\ f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, & f_3(x) = -x, \\ f_4 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, & f_4(x) = \frac{1}{x} \end{array} \quad \text{folgt:}$$

$$\begin{array}{ll} g_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, & g_1(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_3(x_2)) \\ g_2 : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, & g_2(x_1, x_2) = (f_2(x_2), f_4(x_1)) \\ h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, & h(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \end{array}$$

• Zu  $f_1 \circ f_2 \circ f_4 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f_4} \mathbb{R} \xrightarrow{f_2} \mathbb{R} \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}$

Für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ :

$$(f_1 \circ f_2 \circ f_4)(x) = f_1(f_2(f_4(x))) = f_1(f_2(\frac{1}{x})) = f_1\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right) = f_1\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2x^2}$$

• Zu  $f_3 \circ f_2 \circ h : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R} \xrightarrow{f_2} \mathbb{R} \xrightarrow{f_3} \mathbb{R} :$

Für alle  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  gilt:

$$(f_3 \circ f_2 \circ h)(x_1, x_2) = f_3(f_2(h(x_1, x_2))) = f_3(f_2(x_1 + x_2)) = f_3((x_1 + x_2)^2) = -(x_1 + x_2)^2$$

• Zu  $f_2 \circ h \circ g_1 : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g_1} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R} \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}$

Für alle  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  gilt:

$$(f_2 \circ h \circ g_1)(x_1, x_2) = f_2(h(g_1(x_1, x_2))) = f_2(h(f_1(x_1), f_3(x_2))) = f_2(h(\frac{x_1}{2}, -x_2)) = f_2(\frac{x_1}{2} - x_2) = (\frac{x_1}{2} - x_2)^2$$

• Zu  $g_1 \circ g_2 : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \xrightarrow{g_2} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g_1} \mathbb{R}^2$

Für alle  $(x_1, x_2) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$  gilt:

$$(g_1 \circ g_2)(x_1, x_2) = g_1(g_2(x_1, x_2)) = g_1(f_2(x_2), f_4(x_1)) = g_1(x_2^2, \frac{1}{x_1}) = (f_1(x_2^2), f_3(\frac{1}{x_1})) = (\frac{1}{2}x_2^2, -\frac{1}{x_1})$$

10. a) Behauptung:  $\binom{n}{k_1, \dots, k_l} = \binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \dots \binom{n-k_1-\dots-k_{l-2}}{k_{l-1}}$

Unter Verwendung der Definition für die Binomialkoeffizienten folgt:

$$\begin{aligned} & \binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \dots \binom{n-k_1-\dots-k_{l-2}}{k_{l-1}} = \\ &= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \cdot \frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!(n-k_1-k_2-k_3)!} \dots \frac{(n-k_1-k_2-\dots-k_{l-2})!}{k_{l-1}!(n-k_1-k_2-k_3-\dots-k_{l-1})!} \\ &= \frac{n!}{k_1!k_2!k_3! \dots k_l!} \end{aligned}$$

wie man durch sukzessives Kürzen der Terme  $(n-k_1)!, (n-k_1-k_2)!, \dots$   
 $\dots, (n-k_1-k_2-\dots-k_{l-2})!$  im Bruch und an der Identität  $n = k_1 + \dots + k_l \implies$   
 $n - k_1 - k_2 - \dots - k_{l-1} = k_l$  erkennt.

b) *Programm in C++:*

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main()
{
    int n,k;
    double binom,multinom=1.0;
    cout << "n k1 k2 ... ? " ;
    cin >> n;
    while ((cin >> k) && n>k) {
        binom=1.0;
        for (int m=n,l=1; l<=k; --m,++l) binom=binom*m/l;
        multinom*=binom;
        n-=k;
    }
    cout.precision(15);
    cout << multinom << endl;
    return 0;
}
```

*Ausgabe:*

```
n k1 k2 ... ? 8 2 3 3
560
```

```
n k1 k2 ... ? 50 20 20 10
1.41599788880796e+21
```

```
n k1 k2 ... ? 100 25 11 37 27
1.00573275293247e+54
```

```
n k1 k2 ... ? 500 200 150 20 80 50
5.11327643547439e+294
```

Die in b) beschriebene Methode erlaubt es, die einzelnen Binomialkoeffizienten sukzessive unter alleiniger Verwendung der Ganzzahlarithmetik zu bestimmen; anschließend werden die Koeffizienten (ganze Zahlen!) multipliziert - wieder nur mit Ganzzahlarithmetik. Dabei erzeugt man keine wesentlich größeren Zahlen als diejenigen, die als Faktoren des Ergebnisses aus  $\mathbb{N}$  auftreten. (Bei der Berechnung der einzelnen Binomialkoeffizienten kann als Zwischenergebnis höchstens das  $n$ -fache ihres Werts auftreten.)

Die definierende Formel für die Multinomialkoeffizienten dagegen schreibt vor, mit dem Zählerterm  $n!$  eine weitaus größere Zahl zu berechnen als es das Ergebnis ist; anschließend wird durch  $l$  Terme  $k_i!$ ,  $1 \leq i \leq l$ , dividiert. Zahlbereichsüberschreitungen sind dadurch vorprogrammiert.

Bei den hier betrachteten Beispielen reichen der 32-Bit- und 64-Bit-Integerdatentyp zur Darstellung des Endergebnisses jedoch nicht aus, deshalb kam die Methode aus b) mit dem 64-Bit-IEEE-Gleitpunktdatentyp zum Einsatz.