

Lösungsvorschläge zu Analysis I für Informatiker

Blatt 10

46. (4 Punkte)

Behauptung: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen mit $a_n \geq 0$ und $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n)$$

Beweis: (unter Verwendung des Hinweises)

Da nach Vorlesung jede konvergente Folge auch beschränkt ist, ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, und mit Aufgabe (41) von Blatt 9 gilt dann

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n),$$

denn wieder nach Vorlesung gilt für jede konvergente Folge, daß diese genau einen Häufungspunkt besitzt, nämlich den Grenzwert der Folge. Damit gilt für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n).$$

Um die Gleichheit in der Behauptung nachzuweisen, müssen wir nun noch

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) \text{ zeigen. Zunächst:}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n b_n \geq 0 \implies \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \geq 0$$

(denn: Es gibt eine Teilfolge $(a_{n_k} b_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ der Folge $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} b_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n)$.

Da aber $\forall n \in \mathbb{N} : a_n b_n \geq 0$ folgt mit Vorlesung (2.2)c), daß für den Grenzwert $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n)$ gilt: $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \geq 0$.)

$$\text{falls } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0 : \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \geq 0 = 0 \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n)$$

$$\text{falls } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \lim_{k \rightarrow \infty} (a_k) - a_n \leq \left| a_n - \lim_{k \rightarrow \infty} (a_k) \right| < \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} (a_k) \implies$$

$$a_n > \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} (a_k) > 0. \text{ Da aber } a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) > 0 \text{ folgt mit VL (2.5)d), daß}$$

$$\frac{1}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)} \text{ und wieder mit Aufgabe (41):}$$

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left((a_n b_n) \cdot \frac{1}{a_n} \right) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_n} \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \cdot \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)} \xrightarrow[\text{multiplizieren}]{\text{durch-}} \\ &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Alternativer Beweis: (Ohne Verwendung des Hinweises)

Wie oben erhalten wir aus Aufgabe (41)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n)$$

Bleibt zu zeigen:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n)$$

Weil $\limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n)$ ein Häufungspunkt der Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist, gibt es eine Teilfolge $(b_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $b_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{n \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) \geq 0$.

Weil $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$ gilt auch für die Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, daß $a_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \implies a_{n_k} b_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) =: \xi \implies \xi$ Häufungspunkt von $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, d.h. es gilt $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \max\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ Häufungspunkt von } (a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}\} \geq \xi = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n)$.

47. (4 Punkte) Sei im Folgenden stets $n \in \mathbb{N}$.

(a) **Behauptung:** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt[n]{k}}$ konvergiert für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Es handelt sich um eine alternierende Reihe, da für alle $k \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{\sqrt[n]{k}} > 0$. Ferner:

$$\frac{1}{k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \xrightarrow[2.6a)]{\text{VL}} \sqrt[n]{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \sqrt[n]{0} = 0, \text{ also ist die Folge } \left(\frac{1}{\sqrt[n]{k}}\right)_{k \in \mathbb{N}} \text{ eine Nullfolge.}$$

Um das Leibnizkriterium für alternierende Reihen anwenden zu können, muß man noch nachweisen, daß die Folge $\left(\frac{1}{\sqrt[n]{k}}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fällt:

$$k+1 > k \implies 0 < \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} \xrightarrow[\text{der } n\text{-ten Wurzel}]{\text{Monotonie}} 0 < \sqrt[n]{\frac{1}{k+1}} < \sqrt[n]{\frac{1}{k}} \implies \left(\frac{1}{\sqrt[n]{k}}\right)_{k \in \mathbb{N}} \text{ streng monoton fallend.}$$

Damit sind alle Voraussetzungen für die Anwendung des Leibnizkriteriums erfüllt und es folgt die Konvergenz der Reihe für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(b) **Behauptung:** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{k}}$ divergiert für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Für $n = 1$ ist $\sqrt[1]{k} = k$. Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \leq k \leq k^n \implies 1 \leq \sqrt[n]{k} \leq \sqrt[n]{k^n} = k \implies \frac{1}{k} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{k}}.$$

Nach Vorlesung ist die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ bestimmt divergent gegen ∞ , d.h.

ihre Partialsummenfolge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen ∞ : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$.

Nach Definition gibt es also zu jedem $c \in \mathbb{R}$ mit $c \geq 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit:

$\forall n \geq N : s_n \geq c \implies$ für die Partialsummenfolge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der gegebenen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{k}}$ gilt:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[n]{k}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq c \text{ für alle } n \geq N.$$

Damit gilt also auch $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, insbesondere ist also die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{k}}$ divergent.
q.e.d.

(c) **Behauptung:** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{n^k}$ ist divergent für $n = 1$ und konvergent für alle $n \geq 2$.

Beweis:

Falls $n = 1$: $\frac{k^1}{1^k} = \frac{k}{1} = k \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{n^k} = \sum_{k=1}^{\infty} k$ divergiert, da die Folge $(k)_{k \in \mathbb{N}}$ der Reihenterme keine Nullfolge ist (siehe Vorlesung Folgerung (3.4)).

Falls $n \geq 2$: Verwende das Wurzelkriterium:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \sqrt[k]{\frac{k^n}{n^k}} = \frac{(\sqrt[k]{k^n})}{n} = \frac{(\sqrt[k]{k})^n}{n} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n} < 1 \text{ für } n \geq 2$$

Also konvergiert die Folge der k -ten Wurzeln, weshalb für den \limsup der Folge gilt:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{k^n}{n^k}} = \frac{1}{n} < 1 \xrightarrow[3.11b]{\text{VL}} \text{ die Reihe } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{n^k} \text{ konvergiert. } \quad \text{q.e.d.}$$

48. (4 Punkte)

Sei im Folgenden $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen, d.h.

$a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(a) Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist $R = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Beweis:

In Aufgabe 29c) wurde für die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ der Fibonacci-Zahlen gezeigt, daß

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Nun können wir entweder Satz (3.16) der Vorlesung anwenden und für den Konvergenzradius R folgern:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1) \cdot (\sqrt{5}-1)} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5}-1)}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{aligned}$$

oder aber den Konvergenzradius mit dem Quotientenkriterium direkt ausrechnen:

falls $x = 0$: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k 0^k = a_0 0^0 = a_0 = 0$ konvergiert.

$$\text{falls } x \neq 0 : \left| \frac{a_{k+1}x^{k+1}}{a_kx^k} \right| = \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot |x| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot |x| \Rightarrow \\ \Rightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\left| \frac{a_{k+1}x^{k+1}}{a_kx^k} \right| \right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot |x|$$

Nach dem Quotientenkriterium Vorlesung (3.11) gilt:

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot |x| = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\left| \frac{a_{k+1}x^{k+1}}{a_kx^k} \right| \right) < 1 \Rightarrow \text{Konvergenz der Reihe} \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot |x| = \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\left| \frac{a_{k+1}x^{k+1}}{a_kx^k} \right| \right) > 1 \Rightarrow \text{Divergenz der Reihe}$$

Nun ist

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot |x| < 1 \iff |x| < \frac{2}{\sqrt{5} + 1} \stackrel{\text{s.o.}}{=} \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad \text{und} \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot |x| > 1 \iff |x| > \frac{2}{\sqrt{5} + 1} \stackrel{\text{s.o.}}{=} \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \quad \text{also}$$

$$|x| < \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Rightarrow \text{Konvergenz der Reihe} \\ |x| > \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Rightarrow \text{Divergenz der Reihe.}$$

Beides zusammen liefert mit der Definition des Begriffs „Konvergenzradius“:

$$R = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad \text{q.e.d.}$$

(b) **Behauptung:** Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$: $\frac{1}{1 - x - x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

Beweis:

Nach Teil (a) gilt: $|x| < \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergiert.

Sei $s := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, d.h. $s = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right)$ ist der Grenzwert der Partialsummenfolge

$(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der Potenzreihe. Damit folgt aber für alle $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \sum_{k=2}^n a_k x^k \stackrel{a_0=0}{\stackrel{a_1=1}{=}} x + \sum_{2 \leq k \leq n} a_k x^k = \\ &= x + \sum_{0 \leq k-2 \leq n-2} a_{(k-2)+2} x^{(k-2)+2} \stackrel{l:=k-2}{=} \\ &= x + \sum_{l=0}^{n-2} a_{l+2} x^{l+2} = \\ &\stackrel{\text{Rekursion}}{=} x + \sum_{l=0}^{n-2} (a_{l+1} + a_l) x^{l+2} = x + x \sum_{l=0}^{n-2} a_{l+1} x^{l+1} + x^2 \sum_{l=0}^{n-2} a_l x^l = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x + x \sum_{\substack{0 \leq l \leq n-2 \\ \iff 1 \leq l+1 \leq n-1}} a_{l+1} x^{l+1} + x^2 \sum_{l=0}^{n-2} a_l x^l = \\
&\stackrel{k:=l+1}{=} x + x \sum_{k=1}^{n-1} a_k x^k + x^2 \sum_{k=0}^{n-2} a_k x^k = \\
&= x + x \cdot s_{n-1} + x^2 \cdot s_{n-2}
\end{aligned}$$

Nun konvergieren mit der Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auch deren Teilfolgen $(s_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(s_{n-2})_{n \geq 2}$ gegen den Summenwert s . Also:

$$s = x + x \cdot s + x^2 \cdot s \implies s - s \cdot x - s \cdot x^2 = x \implies s(1 - x - x^2) = x \quad \text{für alle } |x| < R.$$

Damit folgt insbesondere für alle $|x| < R$, daß auch $s \neq 0$, und da für $x = 0$ gilt

$$1 - x - x^2 = 1 - 0 - 0^2 = 1 \neq 0, \text{ folgt:}$$

$$1 - x - x^2 \neq 0 \quad \text{für alle } |x| < R.$$

$$\text{Damit gilt } s = \frac{1}{1 - x - x^2} \quad \text{für alle } |x| < R \quad \text{q.e.d.}$$

49. (4 Punkte)

Gegeben sei die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Nach Vorlesung (Leibnizkriterium) ist diese konvergent mit dem Grenzwert $s := \ln(2)$.

(a) **Behauptung:** $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \frac{5}{6}$.

Beweis:

Für die Partialsummenfolge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s$ gilt für gerade $n = 2l \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
s_n = s_{2l} &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2l-1} - \frac{1}{2l}\right) = \\
&= \sum_{\lambda=1}^l \left(\frac{1}{2\lambda-1} - \frac{1}{2\lambda}\right) = \sum_{\lambda=1}^l \frac{2\lambda - (2\lambda-1)}{2\lambda(2\lambda-1)} = \sum_{\lambda=1}^l \frac{1}{2\lambda(2\lambda-1)} = \\
&= \frac{1}{2(2-1)} + \frac{1}{2 \cdot 2(2 \cdot 2-1)} + \sum_{\lambda=3}^l \frac{1}{2\lambda(2\lambda-1)} = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \sum_{\lambda=3}^l \frac{1}{2\lambda(2\lambda-1)} = \frac{7}{12} + \sum_{\lambda=3}^l \frac{1}{2\lambda(2\lambda-1)}
\end{aligned}$$

Nun ist für alle $\lambda \in \mathbb{N}$, $\lambda \geq 2$: $2\lambda(2\lambda-1) > 2\lambda(\lambda-1) > 0 \implies$

$$\implies \frac{1}{2\lambda(2\lambda-1)} < \frac{1}{2\lambda(\lambda-1)}, \text{ also folgt:}$$

$$\begin{aligned}
s_{2l} &= \frac{7}{12} + \sum_{\lambda=3}^l \frac{1}{2\lambda(2\lambda-1)} < \\
&< \frac{7}{12} + \sum_{\lambda=3}^l \frac{1}{2\lambda(\lambda-1)} = \frac{7}{12} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\lambda=3}^l \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} = \\
&= \frac{7}{12} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\lambda=3}^l \left(\frac{1}{\lambda-1} - \frac{1}{\lambda} \right) \stackrel{\text{teleskopische Summe}}{=} \quad (\text{siehe Lösungen zu Aufgabe 19}) \\
&= \frac{7}{12} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{l} \right) = \frac{7}{12} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2l} = \frac{10}{12} - \frac{1}{2l} < \\
&< \frac{5}{6} \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

(b) **Behauptung:** Die Abbildung $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ist bijektiv, wobei für alle $m \in \mathbb{N}_0$ definiert ist:

$$\begin{aligned}
\sigma(3m+1) &= 4m+1 \\
\sigma(3m+2) &= 4m+3 \\
\sigma(3m+3) &= 2m+2
\end{aligned}$$

Beweis:

Wie man der Definition von σ entnehmen kann, gilt für $i \in \{1, 2\}$:

$$\forall m \in \mathbb{N}_0 : \sigma(3m+i) = 4m + (2i-1) \quad (*)$$

In der Übungsaufgabe 30 von Blatt 6 wurde die Division mit Rest behandelt. Demnach gibt es zu jedem $x \in \mathbb{N}$ genau ein $m \in \mathbb{N}_0$ und genau ein $0 \leq r < 3$, so daß $x = 3m + r$, d.h. im Falle $r = 0$: $x = 3m + 0 = 3(m-1) + 3$ eindeutig mit $m-1 \in \mathbb{N}_0$. Also ist die Abbildung σ durch die angegebene Vorschrift wohldefiniert. Um zu zeigen, daß σ bijektiv ist, müssen wir zeigen: σ injektiv und surjektiv.

ad injektiv: Seien nun $x, y \in \mathbb{N}$ mit $\sigma(x) = \sigma(y)$; ferner sei $x = 3m + i$ und $y = 3\mu + j$ mit $m, \mu \in \mathbb{N}_0$ und $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

$$\begin{aligned}
\text{1.Fall: } i, j \neq 3. \text{ Dann: } \sigma(x) = \sigma(y) &\implies \sigma(3m+i) = \sigma(3\mu+j) \stackrel{\text{Def.}}{\implies} \\
&\implies 4m + (2i-1) = 4\mu + (2j-1) \implies 4(m-\mu) = 2(j-i) \implies 2 \stackrel{\sigma}{(m-\mu)} = j-i, \\
&\text{d.h. } j-i \text{ gerade.}
\end{aligned}$$

Dabei ist mit $j, i \in \{1, 2\}$: $j-i \in \{-1, 0, 1\}$ d.h. $j-i \neq -1, 1$, da $-1, 1$ ungerade $\implies j-i = 0 \implies j = i$.

Damit:

$$\begin{aligned}
4m + (2i-1) &= 4\mu + (2i-1) \implies 4m = 4\mu \implies m = \mu \implies \\
&\implies x = 3m + i = 3\mu + j = y \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{2.Fall: } 0 \leq i < 3 \text{ und } j = 3. \text{ Dann: } \sigma(x) = \sigma(y) &\implies \sigma(3m+i) = \sigma(3\mu+3) \stackrel{\text{Def.}}{\implies} \\
4m + (2i-1) &= 2\mu + 2 \implies 2(2m - \mu + i) = 2 + 1 = 3 \quad \nmid \quad (3 \text{ ungerade})
\end{aligned}$$

Also kann dieser Fall nicht eintreten.

3.Fall: $i = j = 3$, d.h. $x = 3m + 3$, $y = 3\mu + 3$. Dann gilt:

$$\sigma(x) = \sigma(y) \implies 3m + 3 = 3\mu + 3 \implies m = \mu \implies x = 3m + 3 = 3\mu + 3 = y$$

q.e.d.

ad surjektiv: Sei nun $y \in \mathbb{N}$. Zu zeigen ist, daß es ein $x \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $y = \sigma(x)$.

Falls y gerade, d.h. $y = 2m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, gilt:

$$y = 2m = 2(m-1) + 2 \stackrel{\text{Def. von } \sigma}{=} \sigma(3(m-1) + 3) \text{ mit } m-1 \in \mathbb{N}_0, \text{ also:}$$

$$x := 3(m-1) + 3 \in \mathbb{N} \text{ und } y = \sigma(x).$$

Falls y ungerade zerlege y gemäß Division mit Rest: es gibt ein $m \in \mathbb{N}_0$ und ein $0 \leq r < 4$, so daß $y = 4m + r$. Da y ungerade ist, muß mit $4m$ gerade aber r ungerade sein, d.h. $r \in \{1, 3\}$.

Falls $r = 1$: $y = 4m + 1 \stackrel{\text{Def. von } \sigma}{=} \sigma(3m + 1)$; definiere also $x := 3m + 1 \in \mathbb{N}$

Falls $r = 3$: $y = 4m + 3 \stackrel{\text{Def. von } \sigma}{=} \sigma(3m + 2)$; definiere also $x := 3m + 2 \in \mathbb{N}$.

Damit besitzt jedes $y \in \mathbb{N}$ ein Urbild $x \in \mathbb{N}$. q.e.d.

- (c) **Behauptung:** Die umgeordnete Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ ist konvergent und ihr Grenzwert ist größer als $\frac{5}{6}$

Beweis:

Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} &= (a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + a_{\sigma(3)}) + (a_{\sigma(4)} + a_{\sigma(5)} + a_{\sigma(6)}) + \dots \\ &= (a_{3 \cdot 0 + 1} + a_{3 \cdot 0 + 2} + a_{3 \cdot 0 + 3}) + (a_{3 \cdot 1 + 1} + a_{3 \cdot 1 + 2} + a_{3 \cdot 1 + 3}) + \dots \\ &= \left(\frac{1}{4 \cdot 0 + 1} + \frac{1}{4 \cdot 0 + 3} - \frac{1}{2 \cdot 0 + 2} \right) + \left(\frac{1}{4 \cdot 1 + 1} + \frac{1}{4 \cdot 1 + 3} - \frac{1}{2 \cdot 1 + 2} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{4 \cdot 2 + 1} + \frac{1}{4 \cdot 2 + 3} - \frac{1}{2 \cdot 2 + 2} \right) + \dots \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \right) + \dots \end{aligned}$$

Man setze nun $b_\mu := a_{\sigma(3\mu+1)} + a_{\sigma(3\mu+2)} - a_{\sigma(3\mu+3)} = \sum_{j=1}^3 a_{\sigma(3\mu+j)}$.

Für jede natürliche Zahl n gilt wieder mit Division mit Rest: Es gibt eindeutig bestimmte $m \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq r < 3$, so daß $n = 3m + r$.

Für die Partialsummenfolge $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der umgeordneten Reihe, d.h. $\Sigma_n = \sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)}$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\Sigma_n &= \sum_{k=1}^{3m+r} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{3m} a_{\sigma(k)} + \sum_{j=1}^r a_{\sigma(3m+j)} \\
&= (a_{\sigma(3 \cdot 0 + 1)} + a_{\sigma(3 \cdot 0 + 2)} + a_{\sigma(3 \cdot 0 + 3)}) + (a_{\sigma(3 \cdot 1 + 1)} + a_{\sigma(3 \cdot 1 + 2)} + a_{\sigma(3 \cdot 1 + 3)}) + \dots \\
&\quad \dots + (a_{\sigma(3 \cdot (m-1) + 1)} + a_{\sigma(3 \cdot (m-1) + 2)} + a_{\sigma(3 \cdot (m-1) + 3)}) + \sum_{j=1}^r a_{\sigma(3m+j)} \\
&\stackrel{\text{Def. der } b_\mu}{=} b_0 + b_1 + \dots + b_m + \sum_{j=1}^r a_{\sigma(3m+j)} \\
&= \sum_{\mu=0}^m b_\mu + \sum_{j=1}^r a_{\sigma(3m+j)}
\end{aligned}$$

Wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Nun gilt für $m \rightarrow \infty$: $a_{\sigma(3m+1)} = a_{4m+1} = \frac{1}{4m+1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$,
da $(a_{4m+1})_{m \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Ebenso folgt:

$$\begin{aligned}
a_{\sigma(3m+2)} = a_{4m+3} &= -\frac{1}{4m+3} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \text{ d.h. für jedes } r \in \{0, 1, 2\} \text{ gilt} \\
\sum_{j=1}^r a_{\sigma(3m+j)} &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

Wenn also die Reihe $\sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu$ konvergiert, d.h. dessen Partialsummenfolge $(\beta_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$

mit $\beta_m = \sum_{\mu=0}^m b_\mu$ gegen ein $\beta \in \mathbb{R}$ konvergiert, so gilt auch

$$\Sigma_{3m+r} = \sum_{k=1}^{3m+r} a_{\sigma(k)} = \sum_{\mu=0}^m b_\mu + \sum_{j=1}^r a_{\sigma(3m+j)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \beta \text{ für jedes } r \in \{0, 1, 2\}.$$

Da jedes $n \in \mathbb{N}$ dargestellt werden kann als $n = 3m + r$ mit $0 \leq r < 3$ und natürlich für $n \rightarrow \infty$ auch $m \rightarrow \infty$ folgt $\Sigma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta$, d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu$

Wir brauchen also nur die Reihe $\sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu$ zu untersuchen.

Nun gilt für alle $\mu \geq 1$:

$$\begin{aligned}
b_\mu &= \frac{1}{4\mu+1} + \frac{1}{4\mu+3} - \frac{1}{2\mu+2} \stackrel{4\mu+1 < 4\mu+3}{>} \frac{1}{4\mu+3} + \frac{1}{4\mu+3} - \frac{1}{2\mu+2} = \\
&= \frac{2}{4\mu+3} - \frac{1}{2\mu+2} = \frac{2(2\mu+2) - (4\mu+3)}{(4\mu+3)(2\mu+2)} = \frac{4\mu+4-4\mu-3}{(4\mu+3)(2\mu+2)} = \\
&= \frac{1}{(4\mu+3)(2\mu+2)} > 0
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} b_\mu &= \frac{1}{4\mu+1} + \frac{1}{4\mu+3} - \frac{1}{2\mu+2} \stackrel{4\mu+1 > 4\mu}{<} \frac{1}{4\mu} + \frac{1}{4\mu} - \frac{1}{2\mu+2} = \frac{2}{4\mu} - \frac{1}{2\mu+2} = \\ &= \frac{1}{2\mu} - \frac{1}{2\mu+2} = \frac{(2\mu+2) - 2\mu}{2\mu(2\mu+2)} = \\ &= \frac{1}{\mu(2\mu+2)} \stackrel{2\mu+2 > \mu}{<} \frac{1}{\mu^2} \end{aligned}$$

Insgesamt also gilt für alle $\mu \geq 1$:

$$0 < b_\mu < \frac{1}{\mu^2} \stackrel{\text{Majoranten-}}{\implies \text{kriterium}} \text{ die Reihe } \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu \text{ konvergiert}$$

(denn nach Vorlesung ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent, also eine Majorante

für $\sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu$).

Für den Grenzwert $\beta = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu$ gilt dann:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu = b_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu \stackrel{b_\mu > 0}{>} b_0 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{8}{6} - \frac{3}{6} = \frac{5}{6} \quad \text{q.e.d.}$$

50. Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ die Fibonacci-Folge aus Aufgabe 48 und

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{1-x-x^2}$ ihre erzeugende Funktion.

(a) **Behauptung:** Für die Partialbruchentwicklung von f gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot x} - \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot x}$$

Beweis:

Zunächst untersuchen wir den Nenner $1-x-x^2$ auf Nullstellen, um ihn gemäß dem Satz von Vieta in ein Produkt zu zerlegen:

$$\begin{aligned} 1-x-x^2 &= -(x^2+x-1) = -\left(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1\right) = -\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right) = \\ &= -\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = -\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

Wir führen folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &:= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \\ \lambda_2 &:= \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Für diese beiden Größen gelten zudem die Relationen:

$$(*) \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{5} \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

(siehe Aufgabe 29; einfaches Nachrechnen).

Somit können wir schreiben:

$$1 - x - x^2 = -(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2x^2 = (1 - \lambda_1x) \cdot (1 - \lambda_2x)$$

Damit machen wir den Ansatz:

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{A}{1 - \lambda_1 \cdot x} + \frac{B}{1 - \lambda_2 \cdot x} \quad \text{für geeignete } A, B \in \mathbb{R}.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - x - x^2} &\stackrel{!}{=} \frac{A}{1 - \lambda_1 \cdot x} + \frac{B}{1 - \lambda_2 \cdot x} = \frac{A \cdot (1 - \lambda_2x) + B \cdot (1 - \lambda_1x)}{(1 - \lambda_1x) \cdot (1 - \lambda_2x)} = \\ &= \frac{(A + B) - (A\lambda_2 + B\lambda_1) \cdot x}{1 - x - x^2} \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert nun die Bedingungen für A und B :

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ A\lambda_2 + B\lambda_1 &= 0 \end{aligned}$$

Wegen $B = 1 - A$, eingesetzt in die zweite Gleichung, folgt:

$$\begin{aligned} A\lambda_2 + (1 - A)\lambda_1 &= 0 \implies A \cdot \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{=-\sqrt{5} \text{ nach } (*)} = -\lambda_1 \implies A = \frac{\lambda_1}{\sqrt{5}} \\ \implies B &= 1 - A = 1 - \frac{\lambda_1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5} - (1 + \sqrt{5})}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} = -\frac{\lambda_2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Damit folgt für die Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - x - x^2} &= \frac{\lambda_1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \lambda_1 \cdot x} - \frac{\lambda_2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \lambda_2 \cdot x} \\ &= \frac{\lambda_1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot x} - \frac{\lambda_2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \cdot x} \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot x} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \cdot x} \end{aligned}$$

(b) **Behauptung:** $\forall k \in \mathbb{N}_0 : a_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right)$

Beweis:

Wir haben in Teil (a) gesehen, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \notin \{\lambda_1, \lambda_2\}$ gilt:

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{\lambda_1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1-\lambda_1 \cdot x} - \frac{\lambda_2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1-\lambda_2 \cdot x} \quad (**)$$

Wenn nun zusätzlich $|x| < R = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = -\lambda_2$, so folgt:

$$|x| < -\lambda_2 \implies |\lambda_1 x| < -\lambda_1 \lambda_2 \stackrel{(*)}{=} 1 \quad \text{und}$$

$$|\lambda_2 x| < (\lambda_2)^2 = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \stackrel{!}{<} 1 \iff 3-\sqrt{5} < 2 \iff 1 < \sqrt{5}, \quad \text{und das ist wahr.}$$

Für $|x| < R$ ist also sowohl $|\lambda_1 x| < 1$ als auch $|\lambda_2 x| < 1$, weshalb mit Hilfe der geometrischen Reihe folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\lambda_1 x} &= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_1 x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1^k x^k \quad \text{und} \\ \frac{1}{1-\lambda_2 x} &= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_2 x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_2^k x^k \end{aligned}$$

Nun benutzen wir die Darstellung aus (**) für die Grenzfunktion $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$

der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ im Konvergenzintervall $]x-R, x+R[$;

damit gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= \frac{1}{1-x-x^2} = \\ &= \frac{\lambda_1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1-\lambda_1 x} - \frac{\lambda_2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1-\lambda_2 x} \\ &= \frac{\lambda_1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1^k x^k - \frac{\lambda_2}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_2^k x^k \\ &\stackrel{\substack{\text{beide Reihen} \\ \text{konvergent}}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{5}} \lambda_1^k x^k - \frac{\lambda_2}{\sqrt{5}} \lambda_2^k x^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\sqrt{5}} x^k \end{aligned}$$

Führen wir nun einen Koeffizientenvergleich durch, so sieht man:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : a_k = \frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right)$$

q.e.d.