

Analysis für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 31 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ für die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

(a) $a_n = \frac{4n^2 - n^4}{3(n^2 + 1)^2},$

(b) $a_n = \frac{2^n + n^2}{\sqrt{3^n + 4^n}},$

(c) $a_n = \sqrt[n]{3^n \cdot n^3},$

(d) $a_n = \sqrt[2n]{2^n + n^2}.$

Aufgabe 32 (4 Punkte)

Sei $\text{sign}(x) := \begin{cases} 1 & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -1 & : x < 0 \end{cases}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$. Zeigen Sie:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \text{sign}(a - b),$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a, b).$

Aufgabe 33 (4 Punkte)

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$a_0 := 0, \quad a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

(a) Beweisen Sie die Konvergenz der Folge (zeigen Sie Monotonie und Beschränktheit).

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge.

(c) Was ergibt sich im allgemeinen Fall $a_0 = c > 0$ anstatt $a_0 = 0$?

Aufgabe 34 (4 Punkte)

Sei $a > 0$, $x_0 \geq \sqrt{a}$, und $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ ($n \in \mathbb{N}_0$). Zeigen Sie:

(a) $x_n \geq \sqrt{a}$ ($n \in \mathbb{N}_0$). (Hinweis: Aufgabe 24a)

(b) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine monoton fallende Folge.

(c) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen \sqrt{a} .

Bitte wenden!

Aufgabe 35*

Sei $a > 0$, $x_0 > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ und $x_{n+1} = \frac{1}{k} \left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right)$ ($n \in \mathbb{N}_0$).

Zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt[k]{a}$.

(Hinweise: Gehen Sie analog zu Aufgabe 34 vor. Zeigen Sie für $x_0 < \sqrt[k]{a}$, dass $x_1 > \sqrt[k]{a}$ gilt und man sich deshalb auf den Fall $x_0 \geq \sqrt[k]{a}$ beschränken kann.)

Abgabe einzeln oder zu zweit: Montag, 17.12.2007 bis 16¹⁵ Uhr,
Übungskasten vor der Bibliothek im 1. Stock

*Diese Zusatzaufgabe soll weitere Anwendungsmöglichkeiten des Vorlesungsstoffes aufzeigen. Sie wird aber nicht korrigiert und ist auch nicht prüfungsrelevant.