

## Analysis für Informatiker und Statistiker

### Aufgabe 26 (4 Punkte)

Zeigen Sie jeweils mit vollständiger Induktion:

- (a)  $n! \geq 2^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$
- (b)  $\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$

### Aufgabe 27 (4 Punkte)

- (a) Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitzstetig und es existiere ein  $\delta > 0$  so dass  $|f(x)| \geq \delta$  für alle  $x \in I$ .  
Zeigen Sie: Die Funktion  $\frac{1}{f(x)}$  ( $x \in I$ ) ist lipschitzstetig.
- (b) Sei  $I = [a, \infty[$  mit  $a > 0$ . Zeigen Sie:  $f(x) = \frac{1}{x}$  ( $x \in I$ ) ist lipschitzstetig.  
(Bem.: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass  $f(x) = \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ) nicht lipschitzstetig ist.)

### Aufgabe 28 (4 Punkte)

Sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ ,  $a > 0$ . Zeigen Sie:

- (a)  $f : [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[k]{x}$  ist lipschitzstetig.
- (b)  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[k]{x}$  ist nicht lipschitzstetig.

### Aufgabe 29 (4 Punkte)

- (a) Seien  $\lambda_1, \lambda_2$  die Lösungen der quadratischen Gleichung  $x^2 = x + 1$ . Zeigen Sie:  
 $a_n := A \cdot \lambda_1^n + B \cdot \lambda_2^n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) erfüllt die rekursive Beziehung  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).
- (b) Bestimmen Sie  $A$  und  $B$  so, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  die Fibonacci-Folge  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) darstellt.
- (c) Berechnen Sie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  für die Fibonacci-Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .

*Bitte wenden!*

### Aufgabe 30\*

Sei  $B \in \mathbb{N}$ ,  $B \geq 2$ ,  $x = \frac{s}{t}$  mit  $s, t \in \mathbb{N}$ ,  $s < t$  und  $s, t$  teilerfremd.

- (a) Zeigen Sie für den zur Bestimmung einer  $B$ -adischen Entwicklung von  $x$  in 1.17b verwendeten Algorithmus

$$a_0 = x; \quad z_{k+1} = [Ba_k], \quad a_{k+1} = Ba_k - z_{k+1} \quad (k \in \mathbb{N}_0)$$

dass  $l \in \mathbb{N}_0$  und  $p \in \mathbb{N}$  existieren mit

$$a_{k+p} = a_k \quad (k \geq l) \quad \text{und} \quad z_{k+p} = z_k \quad (k > l).$$

(Periodenschreibweise:  $x = (0.z_1 z_2 \dots z_l \overline{z_{l+1} \dots z_{l+p}})$ , sofern mindestens ein  $z_k \neq 0$  mit  $k \in \{l+1, \dots, l+p\}$  existiert.)

Hinweis: Zeigen Sie zunächst mit vollst. Induktion, dass  $a_k \in \left\{0, \frac{1}{t}, \dots, \frac{t-1}{t}\right\} \quad (k \in \mathbb{N}_0)$ .

- (b) Zeigen Sie, dass sich der Algorithmus aus (a) in der Gestalt

$$s_0 = s; \quad Bs_k = t \cdot z_{k+1} + s_{k+1} \quad (k \in \mathbb{N}_0) \quad [\text{ganzz. Division von } Bs_k \text{ durch } t \text{ mit Rest}]$$

schreiben lässt, worin  $s_k \in \{0, 1, \dots, t-1\}$  und  $a_k = \frac{s_k}{t}$ .

**Abgabe einzeln oder zu zweit:** Montag, 10.12.2007 bis 16<sup>15</sup> Uhr,  
Übungskasten vor der Bibliothek im 1. Stock

---

\*Diese Zusatzaufgabe soll weitere Anwendungsmöglichkeiten des Vorlesungsstoffes aufzeigen. Sie wird aber nicht korrigiert und ist auch nicht prüfungsrelevant.